ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1903 ГОДЪ

(XIV-й годъ изданія)

НА ОБЩЕПЕДАГОГИЧЕСКІЙ ЖУРНАЛЪ ДЛЯ ШКОЛЫ И СЕМЬИ

„РУССКАЯ ШКОЛА".

Программа журнала: 1) Правительственныя распоряженія; 2) Статьи по исторіи педагогики и по исторіи русской школы; 3) Школьныя воспоминанія; 4) Школьная гигіена; 5) Педагогическая психологія; 6) Наблюденія надъ жизнью дѣтей въ ихъ раннемъ и отроческомъ возрастѣ; 7) Дидактика и методика элементарнаго и систематическаго преподаванія; 8) Училищевѣдѣніе; 9) Постановка учебнаго дѣла въ элементарной и средней школѣ; 10) Педагогическія письма; 11) Статьи по вопросамъ профессіональнаго образованія; 12) Статьи по вопросамъ женскаго образованія; 13) Статьи по вопросамъ народнаго образованія; 14) Обзоръ дѣятельности земства по народному образованію; 15) Критика и библіографія; 16) Педагогическая хроника; 17) Разныя извѣстія и сообщенія; 18) Объявленія.

Въ каждой книжкѣ „Русской Школы", кромѣ статей по вопросамъ общепедагогическимъ и методическимъ и отдѣла критики и библіографіи, печатаются: хроника народнаго образованія въ Зап. Европѣ *Е. Р.*, хроника народнаго образованія въ Россіи и хроника народныхъ библіотекъ *Я. В. Абрамова*, хроника воскресныхъ школъ подъ редакціей *Х. Д. Алчевской* и *М. Н. Салтыковой*, хроника профессіональнаго образованія *В. В. Бирюковича* и пр.

„Русская Школа" выходитъ ежемѣсячно книжками, не менѣе *пятнадцати* печ. листовъ каждая. Подписная цѣна: въ Петербургѣ безъ доставки *семь* руб., съ доставкою 7 руб. 50 коп.; для иногородныхъ съ пересылкою—*восемь* руб.; за границу—*девять* руб. въ годъ. Сельскіе учителя, выписывающіе журналъ за свой счетъ, могутъ получать журналъ за *шесть* руб. въ годъ, съ разсрочкою уплаты въ два срока. Города и земства, выписывающіе не менѣе 10 экз., пользуются уступкою въ 15%.

Журналъ «Русская Школа» допущенъ Ученымъ Комит. Мин. Нар. Просв. къ выпискѣ для фундаментальныхъ библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній, а также въ учительскія библіотеки низшихъ учебныхъ заведеній.

Подписка принимается въ конторѣ редакціи (Литовская ул., 1).

Редакторъ-издатель **Я. Г. Гуревичъ.**

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ. 30 Января 1903 г.

С. И. Шохоръ-Троцкій

МЕТОДИКА АРИѲМЕТИКИ

Часть I

ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ ОДНОКЛАССНЫХЪ НАЧАЛЬНЫХЪ ШКОЛЪ

Пятое изданіе этой книги Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія **одобрено** въ качествѣ **учебнаго руководства** для учительскихъ институтовъ и семинарій и для учительскихъ библіотекъ народныхъ училищъ, а Училищнымъ при Святѣйшемъ Синодѣ Совѣтомъ **включено** въ число учебныхъ пособій для второклассныхъ школъ.

Изданіе 7-е

исправленное и значительно дополненное

Цѣна 1 рубль

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Типографія Спб. Т-ва Печатн. и Издат. дѣла „Трудъ". Фонтанка 86
1903

ВМѢСТО ВВЕДЕНІЯ

ТРИДЦАТЬ МЫСЛЕЙ ОБЪ АРИѲМЕТИКѢ

И ОБЪ ОБУЧЕНІИ ЭТОМУ ПРЕДМЕТУ.

Значеніе и содержаніе ариѳметики.

Если-бы у меня были дѣти, то они должны были-бы не только заниматься языками и выслушивать разные разсказы, но также научиться музыкѣ и изучить ариѳметику.

М. Лютеръ (1483—1546).

Такъ какъ послѣ грѣхопаденія люди ослабѣли разумомъ настолько, что сами не умѣютъ должнымъ образомъ видѣть и слышать, то Всеблагій далъ имъ искусства, съ помощью коихъ они могутъ пріобрѣсти съ трудомъ часть того, что ими при грѣхопаденіи утрачено въ помянутыхъ способностяхъ. Среди сихъ искусствъ ариѳметика отнюдь не принадлежитъ къ числу ничтожнѣйшихъ.

Шей (XVII в.).

Ариѳметика или числительница есть художество честное, независтное, и всѣмъ удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвальнѣйшее, отъ древнѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разныя времена явльшихся изряднѣйшихъ ариѳметиковъ, изобрѣтенное и изложенное.

Леонтій Магницкій (XVIII в.).

Первоначальныя познанія изъ области математики должны входить въ составъ обученія дѣтей. Числа и линіи говорятъ ихъ воображенію гораздо болѣе, чѣмъ это кажется непосвященному. Поэтому, числа и линіи представляютъ собою наивѣрнѣйшее средство для упражненія дѣтей въ мышленіи, не рискующее сбить ихъ съ толку.

Кондорсе (XVIII в.).

Если-бы главнѣйшею цѣлью обученія дѣтей ариѳметикѣ даже было разрѣшеніе сложныхъ и трудныхъ задачъ, то и тогда одною изъ дальнѣйшихъ цѣлей этого обученія было-бы, все-таки, усовершенствованіе разсудка. Обученіе ариѳметикѣ должно быть для дѣтскаго ума тѣмъ же, чѣмъ точильный камень служитъ для еще не отточеннаго рѣжущаго орудія.

Клаусбергъ (XVIII в.).

Ариѳметика, благодаря своему содержанію, является наилучшимъ средствомъ для развитія сужденія; но она перестаетъ быть таковымъ средствомъ, если ученикъ, какъ это очень часто случается, принимаетъ ученіе ея на-вѣру.

Базедовъ (1723—1790).

И родное слово, и созерцаніе пространства могутъ насъ ввести иногда въ заблужденіе. Только число ведетъ къ безошибочнымъ результатамъ; только оно безошибочно, ибо оно служитъ для расчета, для вычисленія. Поэтому оно должно входить въ составъ начальнаго обученія.

Песталоцци (1746—1827).

Мысль обозначенія чиселъ помощью десяти знаковъ, основаннаго на безусловномъ и мѣстномъ значеніяхъ цифръ, такъ проста, что только по этой причинѣ мы забываемъ—какого она достойна удивленія. Но именно эта простота и та легкость, которою ей обязано ариѳметическое вычисленіе, дѣлаютъ ариѳметическую систему индусовъ однимъ изъ полезнѣйшихъ изобрѣтеній. Насколько было трудно изобрѣтеніе этой системы, можно судить

по тому, что ея не могли изобрѣсти ни Архимедъ, ни Аполлоній Пергейскій, принадлежащіе къ числу величайшихъ умовъ древности.

Лапласъ (1749—1827).

Ариѳметика стоитъ въ томъ же отношеніи къ математикѣ (включая въ нее геометрію и механику), въ какомъ математика—къ изученію природы. Математика—царица естествознанія, а ариѳметика—царица математики.

Гауссъ (1777—1855).

Въ курсѣ ариѳметики необходимы простыя задачи и естественныя сложныя, безполезны—большая часть упражненій надъ обыкновенными дробями; должны же быть исключены изъ курса—дѣйствія надъ составными именованными числами и задачи на вычисленіе времени, на сложное тройное правило и на нѣкоторыя процентныя вычисленія.

Штейеръ (XIX в.).

Обученіе ариѳметикѣ.

Вычисляя, ребенокъ прежде всего долженъ учиться.

Янъ Аммосъ Коменскій (1592—1672).

Ариѳметика—самый легкій родъ отвлеченной умственной дѣятельности и, слѣдовательно, первый, какой обыкновенно можетъ вынести умъ или къ которому онъ привыкаетъ. Она вообще такъ полезна во всѣхъ житейскихъ положеніяхъ и дѣлахъ, что едва ли что-нибудь можетъ быть сдѣлано безъ нея. Но здѣсь, какъ и во всѣхъ отрасляхъ воспитанія, надо очень тщательно наблюдать за тѣмъ, чтобы съ дѣтьми начиналось обученіе съ легкаго и простого, чтобы имъ за одинъ разъ сообщалось какъ можно меньше и чтобы сообщенное хорошенько укрѣпилось въ ихъ головахъ, прежде чѣмъ они перейдутъ къ чему-либо послѣдующему или новому.

Джонъ Локкъ (1632—1704).

При обученіи ариѳметикѣ не надо удовлетворяться тѣмъ, что учитель провозглашаетъ истины: надо стремиться къ уразумѣнію истинъ этихъ учениками. Поэтому надо дѣйствовать не только на память учениковъ, но вліять также на ихъ разумѣніе. Отъ начинающихъ, конечно, нельзя требовать вполнѣ точныхъ объясненій и доказательствъ, ибо природа не терпитъ скачковъ ни въ вещественномъ мірѣ, ни въ мірѣ духовномъ. Но даже первоначальное обученіе должно стремиться къ тому, чтобы умъ учениковъ совершенствовался.

Вольфъ (1679—1754).

Ариѳметика—учебный предметъ, опирающійся на доводы и заключенія разума. Она приноситъ тѣмъ большую пользу образованію, чѣмъ болѣе учитель старается вызвать учениковъ на самодѣятельную и творческую работу.

Гауфъ (XVIII в.).

Не задерживайте своихъ учениковъ на опредѣленіяхъ (ариѳметики, именованнаго числа, числа отвлеченнаго, ариѳметическаго дѣйствія и т. п.), а напротивъ: поскорѣе приступите къ упражненіямъ въ счетѣ. Не показывайте имъ, какъ надо рѣшить предложенный вопросъ, а напротивъ: дайте имъ самимъ поработать надъ вопросомъ. Упражняйте ихъ на такихъ примѣрахъ, которые имѣютъ какое-либо отношеніе къ ремеслу и роду занятій ихъ родителей. Не мучайте дѣтей большими числами и не двигайте учениковъ впередъ, пока они не усвоили предыдущаго. Пусть въ вашемъ распоряженіи всегда имѣются предметы, надъ которыми ученики могли бы совершать свои расчеты, и всегда предпочитайте такія вычисленія вычисленіямъ умственнымъ и на доскѣ.

Овербергъ (XVIII в.).

Изустныя вычисленія тѣмъ хороши, что пріучаютъ дѣтей заниматься тѣмъ, чѣмъ въ настоящую минуту надо заниматься, и не уподобляться при рѣшеніи задачъ мотылькy, перелетающему съ одного цвѣтка на другой.

Бирманъ (XVIII в.).

Дѣти должны учиться ариѳметикѣ, потому что она ихъ пріучитъ къ вниманію и вдумчивости, къ уразумѣнію вопросовъ о прибыли и убыткѣ, къ осторожности въ предпріятіяхъ, къ легкому и быстрому выполненію могущихъ встрѣтиться вычисленій. Вся остановка только за хорошей методой обученія.

Овербергъ (XVIII в.).

Извѣстно, что ариѳметика во всѣхъ учебникахъ этого предмета, большею частью, опирается на выучиваніе учениками правилъ наизусть или, въ лучшемъ случаѣ, на упражненія безъ должнаго уразумѣнія правилъ. Но мнѣ этотъ родъ ученія всегда казался слишкомъ поверхностнымъ. Я всегда думалъ, что при обученіи ариѳметикѣ надо, главнымъ образомъ, имѣть въ виду разумъ. Послѣдній испытываетъ великое удовлетвореніе, когда ему въ ариѳметикѣ удается постигнуть самый корень вещей, т. е. самый способъ примѣненія правила къ примѣру, какъ и способъ изобрѣтенія этого правила.

Клаусбергъ (XVIII в.).

Наши ученики не нуждаются въ недантическомъ и шарлатанскомъ аппаратѣ обычныхъ учебниковъ ариѳметики,—во всѣхъ этихъ громадныхъ задачахъ, многословныхъ правилахъ и опредѣленіяхъ, и т. п. Они нуждаются не въ научной ариѳметикѣ и не въ искусственныхъ вычисленіяхъ, а только во власти надъ такими вычисленіями, въ которыхъ они будутъ нуждаться и которыя они будутъ въ состояніи примѣнить въ своей жизни. Для игры въ ариѳметику у насъ нѣтъ времени... Всѣ вычисленія надо брать изъ областей, доступныхъ дѣтскому пониманію: они должны относиться до размѣровъ участка земли, до разстояній, до количества кочней капусты, до количества сѣна и т. п. Пора бросить вычисленія надъ десятизначными числами, умноженія и дѣленія десятизначныхъ чиселъ на пяти и шестизначныя, и т. п.

Петръ Вильомъ (XVIII в.)

Если кто пріобрѣлъ въ примѣненіи четырехъ дѣйствій должный навыкъ, то онъ пріобрѣлъ также навыкъ въ вычисленіи и болѣе ни въ чемъ не нуждается. Поэтому, совершенно безполезно задерживать его на примѣрахъ, относящихся до всяческихъ товаровъ, до вычисленія вѣса упаковки, до сложныхъ процентовъ, до скидокъ и учетовъ, до сравненія денежныхъ единицъ разныхъ странъ, до сложныхъ расчетовъ о прибыляхъ и убыткахъ, и т. п.

Базедовъ (1723—1790).

Многолѣтній опытъ убѣждаетъ въ томъ, что только тѣ ученики умѣютъ хорошо вычислять письменно, которыхъ учили также вычисленію изустному.

Келеръ (XVIII в.)

Прежде чѣмъ поощрять дѣтей къ болтовнѣ о тысячахъ и милліонахъ, учениковъ надо научить вычисленію надъ числами первой сотни.

Буссе (XVIII в.).

Встарину удовлетворялись, при обученіи ариѳметикѣ, тѣмъ, что память обременялась великимъ множествомъ словъ и правилъ. При этомъ не обращалось вниманія на взаимодѣйствіе между этою способностью и воображеніемъ. Кромѣ того, не соблюдалась постепенность въ развитіи способностей человѣческой души, а умъ ребенка наполнялся шелухою отвлеченныхъ мыслей, какую представляютъ собою, по причинѣ своей неудобоваримости, всяческія сухія опредѣленія, раздѣленія и расчлененія понятій, которыми старались напитать умъ учениковъ.

Песталоцци.

Для того, чтобы обученіе ариѳметикѣ было нехорошо, надобно: а) изъ четырехъ часовъ въ недѣлю одинъ отводить только „теоріи“, другой—изустнымъ вычисленіямъ, а остальные два—вычисленіямъ письменнымъ; б) начинать съ отвлеченнѣйшихъ понятій и большую часть времени посвящать ненужному; в) при изустныхъ вычисленіяхъ поощрять не творчество учениковъ, а заставлять ихъ дѣлать эти вычисленія подобно письменнымъ; г) для наѣзжаго ревизора съ учениками вытвердить наизусть нѣсколько трудныхъ изустныхъ вычисленій; д) для письменныхъ вычисленій задавать ученикамъ непосильные примѣры, и е) задачи и примѣры брать изъ областей, совершенно чуждыхъ дѣтскому разумѣнію и съ числами очень большими.

Дистервегъ (1790—1866).

Научить ребенка одному механическому расчету и игрѣ въ мертвыя цифры значитъ—надѣть на его духъ колодки, значитъ—окончательно убить въ немъ ариѳметическое разумѣніе.

Дистервегъ.

Дѣти не должны вычислять ничего такого, что имъ недоступно, такъ какъ даже совершеннѣйшій механизмъ вычисленій не достигаетъ цѣли. Что выходитъ за предѣлы вычисленій обыденной жизни и домашняго быта учениковъ, то не можетъ входить въ курсъ школы, а можетъ быть только предметомъ частныхъ уроковъ.

Динтеръ (XIX в.).

Нѣтъ никакой причины скрывать отъ нихъ (отъ крестьянскихъ дѣтей), въ теченіе всего перваго года, существованіе тысячъ, десятковъ и сотенъ тысячъ, — безконечную перспективу чиселъ, группирующихся по системѣ, уже извѣстной имъ по копейкамъ, гривенникамъ и рублямъ. Конечно, нужно избѣгать упражненій, превышающихъ силы учащихся, сообщенія такихъ математическихъ истинъ, которыя могутъ быть восприняты только ихъ памятью. Но не менѣе того нужно избѣгать слишкомъ долгаго пережевыванія уже извѣстнаго ученикамъ: оно порождаетъ скуку, отучаетъ ихъ отъ необходимыхъ умственныхъ усилій.

С. А. Рачинскій (1833—1902).

Математика (стало-быть, и часть ея, ариѳметика) отнюдь не должна быть обращаема въ безплодную игру логическими доказательствами.

Ж. Бертранъ (XIX в.).

Истинно-воспитывающее, истинно-методическое обученіе требуетъ не только общаго раздѣленія курса на ступени, но и такого его раздѣленія, при которомъ предшествующее вполнѣ обосновывалось бы послѣдующимъ и къ нему вело бы самымъ непосредственнымъ образомъ. Для ариѳметики (и вообще для математики) подобная связь, прозрачный распорядокъ и достовѣрная обоснованность курса прямо неизбѣжны. Но надъ всѣми ступенями курса должны господствовать слѣдующія правила: 1) всегда развитіе даннаго ученія, полное разумѣніе и ясность воспріятія должны стоять на первомъ планѣ, упражненіе—на второмъ, а примѣненіе—на третьемъ; 2) вѣрное воспріятіе ученія идетъ путемъ наглядныхъ, причемъ наглядность можетъ быть какъ внѣшнею, такъ и внутреннею; 3) изъ разсмотрѣнія нѣсколькихъ примѣровъ ученики выводятъ правило, законъ, который долженъ быть вѣрно выраженъ; 4) на каждой ступени должно простоять такъ долго, чтобы ученики пріобрѣли, въ упражненіяхъ и примѣненіяхъ, полную власть надъ ея матеріаломъ; 5) вычисленія надъ отвлеченными числами и надъ числами именованными должны всегда итти рука объ руку; одно безъ другого невозможно; 6) употребленіе цифръ должно слѣдовать за вычисленіями не-цифирными; 7) сначала долженъ итти счетъ изустный, затѣмъ—письменный, но всегда—осмысленный; 8) задачи должны имѣть въ виду принятую систему мѣръ; только въ концѣ-концовъ можно обратиться къ мѣрамъ неизвѣстнымъ; 9) на совершенно точномъ и ясномъ изложеніи учениками учебнаго матеріала надо особенно настаивать: они должны не только должны найти вѣрный результатъ, но бѣгло и вѣрно разсказать весь ходъ разсужденій; 10) на всѣхъ ступеняхъ обученія ученики должны быть въ состояніи придумать задачи, относящіяся до этой ступени.

Дистервегъ.

Весь долгій путь развитія человѣчества, каждый разъ повторяется во всякомъ ребенкѣ... Первый человѣкъ, которому

пришлось сдѣлать ариѳметическое вычисленіе, началъ не съ общихъ правилъ, изложенныхъ въ учебныхъ книжкахъ. Вполнѣ очевидно, что прежде всего онъ встрѣтился лицомъ-къ-лицу съ практической задачей, изъ трудностей которой онъ могъ выйти побѣдителемъ, лишь пустивъ въ ходъ всѣ пружины своего ума, — и только пустивъ въ ходъ всѣ пружины своего ума, онъ могъ добраться до правила. При этомъ онъ работалъ вовсе не ради самаго процесса работы, не ради самаго искусства. Заставлять поэтому ребенка начинать съ общихъ правилъ, опредѣленій и отвлеченностей, и затѣмъ уже предлагать задачи для разрѣшенія—это значитъ итти противъ естественнаго хода развитія человѣческаго ума, который у ребенка находится на той же ступени, на которой онъ находился въ періодъ дѣтскаго возраста человѣческаго рода. И главное: чего мы достигаемъ такимъ образомъ? Мы достигаемъ того, что умъ ребенка, оскорбленный столь жестокимъ съ нимъ обращеніемъ, всѣми силами своими сопротивляется преждевременнымъ отвлеченностямъ и что только память его работаетъ для печальнаго нагруженія себя массою словъ и навыковъ, смыслъ которыхъ отъ нея непремѣнно ускользнулъ. Истинная метода обученія ариѳметикѣ состоитъ въ томъ, чтобы поставить умъ ребенка въ условія, приличествующія начальному періоду развитія его, и въ томъ, чтобы ребенокъ присутствовалъ, такъ сказать, при самомъ изобрѣтеніи ариѳметики.

Жанъ Масе (1815—1894).

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Что такое методика ариѳметики?

Что такое учебный предметъ?

§ 1. Всякій учебный предметъ имѣетъ въ виду только нѣкоторыя истины, только нѣкоторые законы, которымъ подчиняются тѣ или иныя явленія, только нѣкоторыя умѣнія (при обученіи искусствамъ), которыя составляютъ предметъ того или иного искусства. Учебный предметъ не задается ни полнымъ изслѣдованіемъ, ни всестороннимъ разсмотрѣніемъ этихъ истинъ, ни открытіемъ новыхъ, доселѣ еще неизвѣстныхъ, законовъ, ни изобрѣтеніемъ какихъ-либо новыхъ художественныхъ пріемовъ. Учебный предметъ имѣетъ въ виду у ч е н и к о в ъ, большею частью малолѣтнихъ, которымъ онъ долженъ дать только нѣкоторый кругъ полезныхъ въ жизни, практически важныхъ, знаній или умѣній. Кромѣ того, онъ долженъ оказать на духовное развитіе ученика полезное развивательное, образовательное вліяніе. При обученіи дѣтей какому-либо предмету и при преподаваніи этого предмета болѣе взрослымъ ученикамъ, необходимо знать всѣ у с л о в і я обученія: а) возрастъ учениковъ, б) ихъ подготовку и уровень знанія и разумѣнія, в) уровень способностей каждаго, въ отдѣльности, ученика, г) всѣ особенности данной школы, общеобразовательныя или иныя цѣли, преслѣдуемыя въ данной школѣ при обученіи этому предмету или при преподаваніи его. Учебному предмету учатъ учителя. Учебные предметы, по содержанію своему и по объему усвояемыхъ учениками свѣдѣній, ограничены довольно тѣсными предѣлами и опредѣляются у ч е б н ы м и п р о г р а м м а м и; въ составъ учебныхъ предметовъ можетъ входить лишь вполнѣ установленное и безспорно извѣстное. Учебные предметы совершенствуются преимущественно въ отношеніи способовъ ихъ преподаванія, и, по содержанію, измѣняются только въ зависимости отъ успѣховъ той отрасли знанія, изъ области которой учебный предметъ черпаетъ входящія въ составъ его свѣдѣнія.

Что такое наука?

Другое дѣло — науки. Онѣ обнимаютъ все, относящееся до ихъ предмета; онѣ задаются возможно полнымъ изслѣдованіемъ, возможно всестороннимъ разсмотрѣніемъ того, что входитъ въ ихъ область; онѣ стараются объ открытіи новыхъ законовъ природы, новыхъ пріемовъ изслѣдованія, объ изобрѣтеніи новыхъ способовъ изученія истины. Науки имѣютъ въ виду не учениковъ, а ученыхъ,—людей, самостоятельно работающихъ въ области научной. Содержаніе наукъ и объемъ ихъ ничѣмъ не ограничены, и въ составъ наукъ входитъ въ данное время также много, еще не вполнѣ установленныхъ, спорныхъ взглядовъ, на почвѣ которыхъ люди науки считаютъ возможнымъ, путемъ неустанной работы, добраться до болѣе точнаго познанія истины и до болѣе вѣрныхъ взглядовъ.

Эти различія между науками и учебными предметами должны быть сознаваемы всякимъ учителемъ и воспитателемъ вполнѣ ясно, такъ какъ смѣшеніе учебнаго предмета съ наукою можетъ повести учителя къ прегрѣшеніямъ противъ требованій и цѣлей обученія дѣтей данному учебному предмету, а также противъ требованій дѣтской природы и разумѣнія. Одного вправѣ требовать люди науки отъ учителей, а именно: чтобы свѣдѣнія учебнаго предмета не противорѣчили тѣмъ научнымъ истинамъ и взглядамъ, которые уже твердо установлены, и чтобы то, въ чемъ наука еще не добилась опредѣленнаго взгляда, не выдавалось въ учебномъ предметѣ за нѣчто достовѣрное.

Ариѳметика какъ учебный предметъ.

§ 2. Ариѳметика, какъ учебный предметъ, содержитъ въ себѣ ученіе о производствѣ четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами и о примѣненіи этихъ дѣйствій къ рѣшенію разнаго рода задачъ съ числовыми данными. При этомъ задачи, предлагаемыя на урокахъ ариѳметики, обыкновенно не требуютъ никакихъ особенныхъ познаній изъ области какихъ-либо наукъ и должны, въ словесномъ отношеніи, быть вполнѣ понятными разумѣнію учениковъ. Курсы ариѳметики, подлежащіе прохожденію въ различныхъ учебныхъ заведеніяхъ, различны иногда и по содержанію, и по объему. Въ учебныхъ заведеніяхъ одного рода курсъ этотъ содержитъ прямо больше учебнаго матеріала, т. е. содержитъ больше ученій даннаго предмета (напр., въ однихъ уч. заведеніяхъ проходятъ, а въ другихъ не проходятъ ученій о десятичныхъ дробяхъ, о цѣпномъ правилѣ, о пропорціяхъ, и т. п.). Кромѣ того, одно и то же ученіе въ уч. заведеніяхъ одного рода проходится вкратцѣ, а въ другомъ съ подробностями, т. е. одно и то же проходится въ разномъ объемѣ.

Содержаніе ариѳметики. § 3. Содержаніе ариѳметики, какъ предмета обученія въ русской начальной одноклассной школѣ, ограничивается, въ виду кратковременности курса этой школы, нумераціею (устною и письменною), четырьмя дѣйствіями надъ цѣлыми числами и только простѣйшими упражненіями надъ числами дробными. Рѣшать дѣти должны только задачи, не принадлежащія ни къ числу очень трудныхъ, ни къ числу очень многосложныхъ или сколько-нибудь замысловатыхъ. Непосредственная цѣль обученія ариѳметикѣ въ школахъ этого рода состоитъ въ томъ, чтобы дѣти научились: а) правильно, болѣе или менѣе быстро и вполнѣ сознательно производить четыре дѣйствія надъ цѣлыми числами (отвлеченными и именованными); б) ясно понимать нѣкоторые простѣйшіе случаи примѣненія дробныхъ чиселъ къ задачамъ на сложеніе и вычитаніе дробей (половинъ, четвертей, восьмыхъ, шестнадцатыхъ, десятыхъ и сотыхъ долей), на нахожденіе части даннаго числа и на нахожденіе цѣлаго по данной части его; и в) примѣнять четыре дѣйствія къ рѣшенію не замысловатыхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ.—Въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній (гимназій, реальныхъ училищъ и т. п.) а также въ двуклассныхъ и многоклассныхъ низшихъ учебныхъ заведеніяхъ подлежитъ усвоенію полный курсъ ариѳметики. Т. е., сверхъ того, что проходится въ начальной одноклассной школѣ, тамъ надо пройти ученіе объ обыкновенныхъ дробяхъ и о дробяхъ десятичныхъ, а также надо научить рѣшенію задачъ, выходящихъ за предѣлы, выше намѣченные, какъ, напр., рѣшенію задачъ съ помощью пропорцій. Въ тотъ же курсъ входятъ болѣе или менѣе полныя ученія о признакахъ дѣлимости цѣлыхъ чиселъ и о нахожденіи наименьшаго кратнаго и общаго наибольшаго дѣлителя двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ чиселъ.

Методика ариѳметики. § 4. Какъ надобно учить ариѳметикѣ для того чтобы наполезнѣйшимъ, для ученика, образомъ были достигнуты объ (практическая и образовательная) цѣли обученія ариѳметикѣ, тому учитъ методика ариѳметики. Въ ней не только освѣщаются установленная программа обученія ариѳметики и распорядокъ всего курса, т. е. распредѣленіе всего курса по годамъ. Въ ней не только указываются частные пріемы обученія тому или другому изъ области

ариѳметики, въ той или другой ступени курса. Въ руководствахъ по методикѣ ариѳметики должна быть также изложена какая-либо метода обученія. Методою обученія называется, какъ извѣстно, вся цѣлокупность тѣхъ пріемовъ и способовъ, которые ихъ изобрѣтатель или сторонникъ считаетъ наиболѣе цѣлесообразными при обученіи данному предмету. Практическое и разумное выполненіе учителемъ своихъ обязанностей по отношенію къ ученикамъ почти немыслимо, если онъ не знаетъ заранѣе, какой ему держаться методы обученія (т. е. съ помощью какой совокупности пріемовъ обученія ему приняться за обученіе и продолжать это обученіе на всѣхъ ступеняхъ его), какъ ему поступать, чтобы программа была выполнена и какъ ему распредѣлить учебный матеріалъ не только по годамъ, но и по полугодіямъ, по недѣлямъ и даже по днямъ недѣли.

Кому нужны указанія методики? Всѣ ли учителя нуждаются въ указаніяхъ методики ариѳметики? Въ этихъ указаніяхъ нуждается не только начинающій учитель и готовящійся къ занятію должности учителя. Въ нихъ нуждается и учитель опытный, если онъ не желаетъ остановиться на уже достигнутой имъ степени удовлетворительнаго исполненія обязанностей, а такое нежеланіе обязательно для всякаго, уважающаго себя и любящаго свое дѣло, учителя. Въ указаніяхъ методики нуждается не только учитель, получившій не особенно значительное образованіе: въ нихъ нуждается учитель даже съ образованіемъ высшимъ. Ибо, въ то время какъ первый нуждается не только въ указаніяхъ методики ариѳметики относительно частностей преподаванія и въ поднятіи уровня своего педагогическаго образованія, второй долженъ усвоить себѣ тѣ точки зрѣнія, которыя, сравнительно, весьма близки начальному учителю и отъ которыхъ очень далекъ, вслѣдствіе занятій высшими отраслями знанія, часто чуждыми вопросовъ обученія и воспитанія малолѣтнихъ, человѣкъ съ высшимъ образованіемъ. Учитель русской одноклассной начальной школы поставленъ въ одномъ отношеніи въ особенное положеніе: первый годъ обученія для многихъ его учениковъ, вслѣдствіе нѣкоторыхъ, не зависящихъ отъ школы, причинъ, иногда можетъ быть единственнымъ годомъ, проведеннымъ этими учениками въ школѣ. Поэтому одноклассная школа наша обязана озаботиться сообщеніемъ ребенку, въ первый же годъ его пребыванія въ школѣ, нѣкотораго хотя и незначительнаго, но опредѣленнаго, круга необходимѣйшихъ ученику свѣдѣній по закону Божію, родному языку (чтенію и письму) и ариѳметикѣ. Это ведетъ къ необходимости такъ называемаго „концентрическаго“, т. е. постепенно расширяющагося, распредѣленія всего курса по годамъ,—распредѣленія, при которомъ ученикъ уже къ концу перваго года обученія владѣетъ основными, главнѣйшими свѣдѣніями изъ области поименованныхъ выше предметовъ. Но такое распредѣленіе курса создаетъ для учителя особенныя затрудненія, и учитель можетъ ихъ преодолѣть только при

полномъ знакомствѣ съ требованіями методики преподаванія. Впрочемъ, и учителю средняго учебнаго заведенія, а также учителю высшихъ классовъ многокласснаго низшаго учебнаго заведенія, невозможно обойтись безъ указаній руководствъ по методикѣ ариѳметики, такъ какъ не только начинающій, но и опытный учитель нуждается въ указаніяхъ, которыхъ не найти въ руководствахъ и учебникахъ ариѳметики и до которыхъ добраться собственнымъ умомъ, чаще всего, невозможно. Извѣстно, напр., что ученику не должны быть предлагаемы уже готовыя во всѣхъ своихъ частяхъ ученія даннаго предмета, и что, напротивъ, ученія эти, большею частью, должны постепенно развиваться, опредѣляться, такъ сказать, выростать на глазахъ учениковъ, со всею тою предварительно и болѣе или менѣе самостоятельною душевною работою, которая одна дѣлаетъ ученика господиномъ усваиваемыхъ имъ представленій, понятій, умѣній и познаній. Ученикъ долженъ, по справедливому замѣчанію Масе, присутствовать при изобрѣтеніи ариѳметики. Болѣе того: онъ самъ долженъ участвовать въ этомъ изобрѣтеніи; а это требуетъ уже такихъ пріемовъ, изъ которыхъ только немногіе могутъ быть изобрѣтены учителемъ. Этого мало: методика ариѳметики не стоитъ на одномъ мѣстѣ, а напротивъ— совершенствуется и стремится къ улучшенію пріемовъ обученія. Она чутко прислушивается къ успѣхамъ какъ самаго предмета преподаванія, такъ и способовъ этого преподаванія, и никакой учитель, по самому существу своихъ обязанностей, не въ правѣ думать, что ему уже рѣшительно нечему учиться у другихъ.

Основныя начала.

§ 5. Основныя начала разумнаго, соотвѣтствующаго природѣ дѣтскаго пониманія и сущности предмета, обученія ариѳметикѣ сводятся къ необходимости слѣдующихъ свойствъ преподаванія: а) обученіе должно отличаться наглядностью пріемовъ, б) предлагаемый ученикамъ матеріалъ долженъ отличаться возможно большею простотою, в) самодѣятельность ученика должна стоять на первомъ планѣ, и г) работа ученика должна быть совершенно сознательною. Эти основныя начала могутъ быть освѣщены слѣдующими, тоже не подлежащими спору, правилами:

1) Учить другихъ чему-нибудь значитъ ставить учениковъ въ такія условія, чтобы они **сами** научились тому, чему имъ хотятъ научить (Жакото, 1770—1840).—Это значитъ, что надо стремиться къ тому, чтобы въ ученикахъ развивалась способность къ самостоятельной работѣ и самодѣятельность и чтобы все обученіе, съ самаго начала, опиралось на самодѣятельность учениковъ.

2) Обученіе должно быть подчинено тому вѣчному закону, по которому знаніе человѣка начинается не съ отвлеченныхъ понятій, а съ **наглядныхъ представленій**, и только въ концѣ-концовъ приходитъ къ понятіямъ (Песталоцци, 1746—1827).—

Это значитъ, что надо начинать не съ отвлеченныхъ правилъ или опредѣленій, не съ разсужденій, не съ общихъ соображеній, не съ умозрѣнія, а съ частныхъ житейскихъ случаевъ, съ частныхъ наглядныхъ примѣровъ, дѣйствующихъ на органы чувствъ учениковъ и на ихъ воображеніе, съ задачъ, допускающихъ наглядное рѣшеніе, съ вопросовъ, уже встрѣчавшихся въ жизни учениковъ и подлежащихъ только приведенію въ должный порядокъ и взаимную связь.

3) Каждый разъ надо стремиться къ преодолѣнію только **одной** трудности, не соединяя двухъ или болѣе трудностей въ одно и то же мгновеніе, въ одинъ и тотъ же моментъ обученія (Коменскій, 1592—1672).—Это вытекаетъ изъ требованій простоты предлагаемаго ученику матеріала и означаетъ, что если въ данный моментъ обученія, по самому существу дѣла, скопилось нѣсколько трудностей, то надобно вопросъ расчленить, учениковъ научить преодолѣнію сначала одной трудности, потомъ— другой, и т. д., затѣмъ двухъ трудностей, далѣе—еще одной и т. д., и только въ концѣ-концовъ научить ихъ одновременному, за-разъ, преодолѣнію всѣхъ трудностей.

4) Вычисляя, ребенокъ долженъ **учиться** (Коменскій).— Это значитъ, что, вычисляя, ребенокъ долженъ работать не механически только, не рабски и не слѣпо слѣдуя только правилу, но разумно и сознательно относясь ко всему, что онъ дѣлаетъ, и стараясь (это и значитъ „учиться“) изъ вычисленія извлечь пользу для развитія своего познающаго духа.

Кромѣ этихъ, высказанныхъ вышеименованными **великими** педагогами, правилъ, слѣдуетъ помнить и слѣдующія:

5) Правила не должны быть даваемы учителемъ въ видѣ готовомъ, а напротивъ: должны быть создаваемы и развиваемы, исправляемы и изобрѣтаемы, постепенно, **самими учащимися**, но, конечно, подъ должнымъ руководствомъ учителя.

6) Изустныя вычисленія должны учениками производиться **свободно**, изобрѣтающимъ способомъ, какъ данному ученику въ данное мгновеніе кажется удобнѣе; письменныя же вычисленія должны быть пріурочиваемы къ извѣстнымъ, наиболѣе простымъ, прозрачнымъ и изящнымъ, по внѣшности, **образцамъ**.

7) Простыя задачи (т. е. требующія, для своего рѣшенія, примѣненія одного только дѣйствія) должны лежать въ самой **основѣ** вырабатываемыхъ въ умѣ учениковъ ариѳметическихъ представленій; на задачахъ сложныхъ (т. е. требующихъ

для своего рѣшенія нѣсколькихъ дѣйствій) должны примѣняться пріобрѣтенныя познанія; но при этомъ увлеченіе задачами умышленно запутанными не отвѣчаетъ ни образовательной, ни практической цѣли обученія ариѳметикѣ вообще, ни цѣлямъ обученія ариѳметикѣ въ одноклассной школѣ — въ особенности.

8) Въ первый годъ обученія въ начальной одноклассной школѣ, должны быть положены основанія курса ариѳметикѣ, во второй онъ долженъ быть законченъ въ главныхъ своихъ чертахъ, а въ третій—онъ можетъ быть закругленъ и дополненъ по краткому учебнику.

9) Рѣчь учителя должна быть безусловно проста и ясна, выполненіе письменныхъ работъ учениками—по возможности аккуратно и изящно; это—необходимыя условія всякаго обученія, а потому и обученія ариѳметикѣ, и каждый урокъ ариѳметики, долженъ быть также урокомъ роднаго языка и пріучать къ аккуратности и серьезности въ выполненіи всякой работы.

10) Задачи и примѣры, прорабатываемые учащимися вмѣстѣ съ учителемъ подъ его руководствомъ, должны быть рѣзко отдѣлены отъ задачъ и примѣровъ, прорабатываемыхъ учащимися безъ помощи учителя, хотя бы даже въ его присутствіи: цѣль первыхъ — учить, цѣль вторыхъ — упражнять въ усвоенномъ и подготовлять учащихся къ предстоящимъ занятіямъ.

11) Учитель долженъ самъ говорить мало, но дѣтей онъ долженъ неустанно упражнять въ мышленіи и связанномъ съ нимъ разумномъ употребленіи родной рѣчи; это справедливо относительно всѣхъ предметовъ обученія и, конечно, также относительно обученія ариѳметикѣ.

12) Каждое изъ наглядныхъ пособій должно быть употребляемо лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда именно это наглядное пособіе, а не иное, въ состояніи оказать самую существенную и самую достовѣрную услугу на данной ступени курса.

Какъ не должно учить ариѳметикѣ?

§ 6. Одинъ изъ крупнѣйшихъ нѣмецкихъ педагоговъ, Адольфъ Дистервегъ (1790 — 1866), при жизни пріобрѣтшій себѣ великое множество враговъ своею неустанною борьбою за истинное народное просвѣщеніе, обнародовалъ въ свое время „Шесть правилъ не хорошаго обученія ариѳметикѣ“, которыя, несмотря на нѣсколько шутливый характеръ изложенія, въ сущности содержатъ весьма важныя указанія и весьма сильно и полезно повліяли на обученіе. По мнѣнію Дистервега, для того, чтобы обученіе ариѳметикѣ было не хорошо, надо: а) изъ четырехъ часовъ въ недѣлю, посвященныхъ ариѳметикѣ, часъ отводить теоріи, часъ — изустнымъ вычисленіямъ, а остальные два — вычисленіямъ письменнымъ; при этомъ каждый изъ уроковъ долженъ итти своимъ чередомъ: письменныя вычисленія не должны имѣть ничего общаго съ изустными, а урокъ теоріи не долженъ имѣть ничего общаго ни съ тѣмъ, ни съ другимъ. Это и будетъ не хорошо. б) При изученіи теоріи должно начинать съ самыхъ отвлеченныхъ понятій, а не съ наглядныхъ представленій, большую часть времени посвящать ненужнымъ ученіямъ, въ томъ числѣ подробной теоріи пропорцій и тройныхъ правилъ. Это также будетъ не хорошо. в) При изустныхъ вычисленіяхъ надо развивать не творчество учениковъ, не изобрѣтательность ихъ и не стремленіе къ пользованію здравымъ смысломъ, а заставлять дѣтей мысленно (въ воздухѣ) писать дѣлимое, вертикальную черту, дѣлителя, подъ нимъ — горизонтальную, и т. д. Это равнымъ образомъ не хорошо. г) Дабы придать изустнымъ вычисленіямъ, въ глазахъ наѣзжаго ревизора, должный вѣсъ и такимъ образомъ отличиться по службѣ, должно затвердить съ учениками нѣсколько искусственныхъ (сложныхъ) примѣровъ наизусть. Это будетъ не только не хорошо, но вредно и для нравственнаго преуспѣянія учащихся. д) При письменномъ вычисленіи должно задавать учащимся такіе примѣры, которые учителемъ вычислены, но не объяснены, и, съ собраніемъ отвѣтовъ въ рукахъ, провѣривъ рѣшеніе ученика, восклицать „вѣрно!“ или „невѣрно!“ Это, говорятъ, значитъ „развивать самостоятельность“, но на самомъ дѣлѣ это значитъ — отбивать всякую охоту къ занятіямъ, а потому тоже не хорошо. е) Но наиболѣе подходящимъ средствомъ для дурного преподаванія ариѳметики должно считать выборъ такихъ задачъ и примѣровъ, въ которыхъ числа очень велики, единицы мѣры учащемуся, по возможности, не извѣстны, условія же задачи совершенно чужды его пониманію. — Эти предостереженія Дистервега, къ сожалѣнію, и доселѣ не утратили всего своего предостерегающаго значенія, и ихъ надобно учителю всегда помнить.

Неправильныя выраженія.

§ 7. Дабы рѣчь учителя была дѣтямъ всегда доступна, онъ никогда не долженъ говорить условными выраженіями, которыхъ значеніе еще не извѣстно учащимся и которыя извѣстны только изъ ариѳметики и употребляются только тогда, когда рѣчь касается ариѳметическихъ вопросовъ. Поэтому, напр., не слѣдуетъ говорить: „цифра“— вмѣсто „число“ (т. е. „цифра десятковъ“ вмѣсто „число десятковъ“), „число изображается цифрами“ вмѣсто „число (записываютъ) обозначаютъ особенными знаками — цифрами“; „увеличимъ (уменьшимъ) число“ вмѣсто: „возьмемъ большее (меньшее) число“; „возьмемъ 3 рубля 4 раза“ вмѣсто: „помножимъ 3 рубля на 4“, вмѣсто: „возьмемъ 3 рубля слагаемымъ 4 раза“ и вмѣсто: „возьмемъ 3 рубля, да еще другіе 3 рубля, да еще 3 рубля, да еще 3 рубля“ *), „прибавлю къ слагаемымъ по десяти“ вмѣсто: „прибавляю къ каждому слагаемому десять“; „10

*) Нѣкоторыя изъ этихъ выраженій умѣстны на соотвѣтствующей ступени обученія; только выраженіе „возьмемъ 3 рубля 4 раза“ не умѣстно ни на какой, потому что оно ничего не выражаетъ, пока его условное значеніе не вполнѣ усвоено учащимися. То же справедливо относительно выраженія: „повторимъ 3 рубля 4 раза“, и т. п. Эти выраженія условны, мало выразительны и, вначалѣ, вовсе не нужны.

фунтовъ муки купили по 7-ми коп. за фунтъ“ вмѣсто: „я, ты, онъ купилъ 10 фунтовъ муки по 7 коп. за фунтъ“; „восемь, сложенныя съ пятью, даютъ тринадцать“; вмѣсто: „восемь да пять — тринадцать“; „восемь, уменьшенныя на три, составятъ, будутъ или дадутъ пять“ вм.: „восемь безъ трехъ — пять“; „семь, помноженныя на восемь, дадутъ пятьдесятъ шесть“ вм.: „восемью-семь — пятьдесятъ шесть“ или вм.: „восемью-семь все равно, что пятьдесятъ шесть“; „десять, дѣленныя на два, или уменьшенныя въ два раза, даютъ пять“, вм.: „половина десяти все равно, что пять“, или „если раздѣлить десять на двѣ равныя части, то каждая часть будетъ пять“; „множимое оканчивается двумя нулями“ вм.: „послѣднія двѣ цифры множимаго — нули“; „въ срединѣ множимаго нули“ вм.: „нѣкоторыя, не послѣднія, цифры множимаго — нули“; „мальчикъ имѣлъ девять грушъ“ вм.: „у мальчика было девять грушъ“; „сколько денегъ у обоихъ братьевъ?“ вм.: „сколько денегъ у каждаго изъ братьевъ?“ „что онъ заплатилъ за корову и за лошадь?“ вм.: „что онъ заплатилъ за корову и что — за лошадь?“ „сколько лѣтъ отцу и матери вмѣстѣ?“ вм.: „сколько получится, если сложить число лѣтъ отца съ числомъ лѣтъ матери?“ „сложимъ аршины, купленные въ первый разъ, и аршины, купленные во второй разъ“, вм.: „сложимъ число аршинъ матеріи, которая куплена въ первый разъ, съ числомъ аршинъ матеріи, купленной во второй разъ“; „должно подписать одно число подъ другое такъ и т. д.“ вм.: „можно записать (или запишемъ) всѣ числа такъ“; „займемъ отъ десятковъ единицу“ вм.: „раздробимъ одинъ десятокъ въ единицы“; „нуль обозначаетъ, что десятковъ въ этомъ числѣ нѣтъ“ вм.: „нуль обозначаетъ, что отдѣльныхъ десятковъ въ этомъ числѣ нѣтъ“; „пятнадцать человѣкъ раздѣлить на три части“ вм.: „число человѣкъ, т. е. 15, раздѣлить на три“; „раздѣлить двадцать карандашей между пятью учениками поровну“ вм.: „раздать двадцать карандашей пяти ученикамъ (такъ, чтобы послѣдніе получили карандашей) — поровну“. И т. п.

Выраженія, вродѣ приведенныхъ выше, встрѣчаются не только въ ежедневной жизни учителя, но иногда даже въ довольно извѣстныхъ сочиненіяхъ по предмету преподаванія ариѳметики, и это только доказываетъ — какъ трудно отъ нихъ отдѣлаться. Но все-таки постараться о томъ необходимо всякому учителю, желающему учить дѣтей какъ слѣдуетъ.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Средства обученія ариѳметикѣ.

Воздѣйствіе на органы чувствъ.

§ 1. Всѣ знанія объ окружающемъ (о внѣшнемъ, вещественномъ мірѣ) должны, прежде чѣмъ сдѣлаться достояніемъ нашего ума, пройти чрезъ посредство нашихъ органовъ чувствъ. Отсюда вытекаетъ необходимость также

и сообщенія дѣтямъ такихъ знаній путемъ воздѣйствія на органы чувствъ обучаемыхъ. Обученіе ариѳметикѣ должно опираться преимущественно на зрительныя, осязательныя, мышечныя и слуховыя впечатлѣнія. Органы нашей рѣчи также чрезвычайно важны при выработкѣ ариѳметическихъ представленій въ умѣ учениковъ и при усвоеніи дѣтьми ариѳметическихъ навыковъ, умѣній и познаній.

Раздѣленіе наглядныхъ пособій.

§ 2. Наглядныя пособія, употребляемыя при обученіи дѣтей ариѳметикѣ, можно различать: а) чисто-наглядныя, б) наглядно-вычислительныя, в) наглядно-измѣрительныя и г) чисто-геометрическія. Къ чисто-наглядным принадлежатъ числовыя фигуры и всяческіе чертежи, служащіе для выясненія какого-либо ариѳметическаго вопроса. Къ наглядно-осязательнымъ принадлежатъ: прежде всего пальцы рукъ, затѣмъ кубики и всякіе другіе предметы, удобные для счета, палочки (такъ называемая „солома“, „спички“) и шведскіе счеты. Изъ наглядно-вычислительныхъ пособій первое мѣсто принадлежитъ, конечно, русскимъ торговымъ счетамъ. Но къ ихъ числу могутъ быть присоединены также счеты шведскіе, спички и пальцы (послѣдніе — въ особенности для прибавленія и для таблицы умноженія), Пиѳагорова таблица умноженія и всяческія таблицы цифръ, написанныя на доскѣ, для производства дѣйствій надъ числами. Къ наглядно-измѣрительнымъ пособіямъ принадлежатъ образцы (модели) единицъ мѣры. Наконецъ, къ наглядно-геометрическимъ принадлежатъ геометрическіе чертежи и тѣла для всѣхъ случаевъ, когда ариѳметическій вопросъ касается геометрическихъ представленій (объ углѣ, о квадратѣ, о площади, о кубѣ, и т. п.).

Чисто-наглядныя пособія.

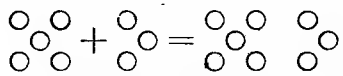
§ 3. Обратимся прежде всего къ чисто-наглядным учебнымъ пособіямъ.

а) Изъ нихъ наиболѣе употребительны, такъ называемыя, „числовыя фигуры“.

Числовыя фигуры.

Числовыя фигуры могутъ служить пособіемъ при обученіи счету и при обозначеніи цифрами даннаго числа значковъ данной фигуры. Но ими отнюдь не слѣдуетъ пользоваться при прохожденіи дѣйствій надъ числами. Если же почему-либо фигуры нужны, то дѣйствія надъ ними на доскѣ можно совершать, но непремѣнно на самомъ дѣлѣ. Т. е., нарисовавъ фигуру о пяти кружкахъ и спросивъ, сколько здѣсь кружковъ, учитель долженъ нарисовать еще три кружка и спросить — сколько ихъ теперь, и т. п. Обозначенія же, въ которыхъ знакъ

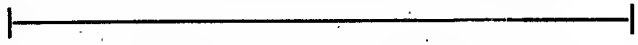
дѣйствія поставленъ между фигурами, напр., подобный слѣдующему безсмысленны, ибо знака плюсъ нельзя ставить между значками числовыхъ фигуръ точно такъ же, какъ его нельзя



ставить между двумя кучками кубиковъ, между двумя полками книгъ въ библіотечномъ шкафу. Числовыя фигуры, въ которыхъ болѣе десяти значковъ, не цѣлесообразны въ виду того, что онѣ перестаютъ быть наглядными и, такимъ образомъ, лишаются своего значенія. Если учитель желаетъ на числовыхъ фигурахъ разработать дѣйствіе сложенія, то не въ знакѣ сложенія дѣло, а въ томъ, чтобы ученики видѣли, что къ фигурѣ изъ пяти кружковъ присоединены еще три кружка, и т. п. Если же учитель желаетъ разработать на нихъ дѣйствіе вычитанія, то онъ долженъ стереть съ доски, на которой нарисована числовая фигура, столько значковъ, сколько единицъ въ вычитаемомъ. Расположеніе значковъ въ числовой фигурѣ должно быть подобно расположенію очковъ на игральныхъ картахъ. Наилучшими значками для числовыхъ фигуръ являются кружочки и косые крестики (вродѣ знака умноженія). Прямые кресты неудобны потому, что горизонтальныя части ихъ сливаются, при неаккуратномъ письмѣ, въ сплошную прямую линію. Особенно полезны числовыя фигуры на первыхъ ступеняхъ обученія.

Черточки. б) Изъ другихъ чисто-наглядныхъ (и въ то же время не исключительно-геометрическихъ) пособій надо пользоваться палочками, рисуемыми учителемъ на доскѣ, и учениками—на доскахъ и въ тетрадяхъ, не въ видѣ числовыхъ фигуръ, а рядомъ одна съ другою,—для упражненій въ одиночномъ и хоровомъ счетѣ и для подготовки руки учениковъ къ письму цифръ.

Прямая линія. в) Къ чисто-наглядным пособіямъ принадлежитъ прямая линія съ рѣзко обозначенными концами, для выработки



представленій: о цѣломъ, о части, о дѣленіи на части, о длинѣ, о нѣкоторыхъ мѣрахъ длины, и т. п. Учителю ариѳметики не надо думать, что дѣти должны только рѣшать задачи на „купцовъ“, „торговцевъ“, на лимоны и апельсины, на шинели и т. п. Очень часто учитель съ помощью задачи относительно прямой линіи можетъ выяснить иное чисто-ариѳметическое ученіе лучше, чѣмъ

съ помощью задачъ о купцахъ, торговцахъ и т. д. и чѣмъ съ помощью отвлеченныхъ разсужденій. Такое выясненіе можетъ оказаться гораздо полезнѣе, чѣмъ рѣшеніе замысловатыхъ задачъ, уразумѣніе которыхъ для учениковъ непосильно только вслѣдствіе пренебреженія къ основнымъ ариѳметическимъ представленіямъ. (См. § 22, гл. VI).

Наглядно-осязательныя пособія. § 4. Обзоръ наглядно-осязательныхъ пособій начнемъ съ такъ называемаго „ариѳметическаго ящика“

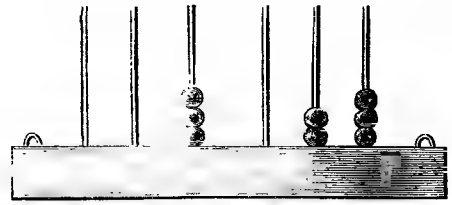
Ариѳм. ящикъ. а) Такъ называютъ совокупность нѣсколькихъ: десятковъ кубиковъ, столбиковъ и досокъ. Изъ этихъ послѣднихъ двухъ пособій столбикъ представляетъ собою прямоугольный параллелепипедъ, основаніе котораго равно основанію кубика, а высота—въ 10 разъ больше высоты кубика, доска же—параллелепипедъ, основаніе котораго въ 100 разъ больше основанія кубика, а высота равна высотѣ его. Изъ всѣхъ этихъ предметовъ полезны преимущественно кубики. Бруски же не исполняютъ своего назначенія, т. е. не даютъ вѣрнаго нагляднаго представленія о десяткѣ кубиковъ, равно какъ и доски не даютъ вѣрнаго нагляднаго представленія о сотнѣ кубиковъ. Дѣло въ томъ, что десятокъ и сотня представляютъ собою только новыя единицы с ч е т а, притомъ единицы составныя, но далеко не представляютъ собою такого же сплошнаго цѣлаго, каковымъ является каждый столбикъ (брусокъ) и каждая доска. Поэтому и при письменномъ обозначеніи чиселъ, и при выясненіи сущности производства дѣйствія надъ двузначными и трехзначными числами эти два пособія не оказываютъ никакихъ услугъ. Они, напротивъ, искажаютъ вѣрное представленіе объ условности десятичной системы счисленія и о тѣхъ услугахъ, которыя эта условность оказываетъ производству дѣйствій, гдѣ группа въ десять единицъ одного разряда с л и в а е т с я въ единицу слѣдующаго высшаго разряда, или же, наоборотъ, одна единица высшаго разряда, при надобности, совершенно свободно р а с п а д а е т с я на десять единицъ ближайшаго низшаго разряда. Въ виду этого, тѣ начальныя школы, въ которыхъ нѣтъ ариѳметическаго ящика, строго говоря, и не должны бы покупать его въ магазинахъ учебныхъ пособій. Всякій плотникъ или столяръ, по указаніямъ учителя, а то и самъ учитель, могутъ приготовить сотню-другую кубиковъ, а еще проще вмѣсто кубиковъ въ такомъ случаѣ употреблять какіе либо другіе, болѣе или менѣе одинаковыя по формѣ, предметы: камешки, еловыя или сосновыя шишки, деревянныя палочки, и т. п. Есть, впрочемъ, случай, но

на одной изъ высшихъ ступеней обученія, когда аккуратно изготовленные кубики могутъ оказать особенную, имъ однимъ присущую, услугу. На той ступени обученія, когда ученики должны освоиться съ составомъ кубическихъ единицъ мѣры, не пользоваться кубиками было бы, по меньшей мѣрѣ, неблагоразумно. Никакія разсужденія и даже чертежи не въ состояніи оказать въ этомъ дѣлѣ такихъ услугъ, которыя могутъ оказать 8 или 27 отдѣльныхъ кубиковъ, сложенныхъ въ новый кубъ. Безъ нихъ выясненіе того утвержденія, что въ кубической сажени 27 кубическихъ аршинъ, страдаетъ нѣкоторою отвлеченностью, въ особенности, если учитель при этомъ не постарается оказать должное воздѣйствіе на пространственное воображеніе учениковъ.

Солома. б) Что касается палочекъ, спичекъ, такъ называемой „соломы“, то это пособіе состоитъ изъ сотни-другой палочекъ одинаковой длины и оказываетъ неоцѣненныя услуги при прохожденіи нумераціи и разъясненіи самаго производства сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ. Лучше всего, если палочки имѣютъ въ длину около полуаршина, а толщину не болѣе толщины карандаша. Конечно, изготовленіе этого учебнаго пособія для учителей не представитъ уже никакихъ затрудненій. Вмѣсто выструганныхъ или выточенныхъ палочекъ можно довольствоваться (въ мѣстностяхъ, гдѣ растутъ камыши или растенія съ подходящими стволами) палочками естественными (палочками изъ ракитника, липы, вербы, осины). Дѣти могутъ и сами изготовить (каждый для себя и для товарищей своихъ) достаточное количество такихъ палочекъ. Особенно велики услуги этого нагляднаго пособія на слѣдующихъ ступеняхъ обученія: 1) при обученіи счету, 2) при усвоеніи дѣтьми сложенія и вычитанія однозначныхъ чиселъ, 3) при выработкѣ въ умѣ ихъ представленія о десяткѣ, 4) при нумераціи чиселъ второго десятка и, наконецъ, 5) при изустномъ производствѣ сложенія и вычитанія надъ двумя двузначными числами. Въ этихъ послѣднихъ трехъ случаяхъ надо пріучить дѣтей къ быстрому связыванію, съ помощью нитки, пучковъ по десяти спичекъ въ каждомъ. Полезно это связываніе производить безъ помощи узловъ, закладывая одинъ конецъ внутрь пучка, а другой протягивая въ промежутки между палочками. Это полезно для того, чтобы и развязываніе производилось быстро. „Солома“, кромѣ того, можетъ считаться и наглядно-вычислительнымъ, при незначительныхъ вычисленіяхъ, пособіемъ,—въ особенности на первыхъ ступеняхъ обученія. Домашнее изготовленіе этого нагляднаго пособія

не представляетъ никакихъ затрудненій, и къ этому дѣлу могутъ быть привлечены и сами ученики. Палочки должны быть всѣ болѣе или менѣе одинаковой длины и изготовляться изъ тонкихъ ракитовыхъ, березовыхъ и другихъ прутиковъ, изъ камышинокъ, изъ отработавшихъ и слишкомъ рано потухшихъ зажигательныхъ спичекъ, и т. п.

Шведскіе счеты. в) Шведскіе счеты состоятъ изъ четыреугольной рамки, стоящей на ножкахъ (см. стр. 25). Въ ней продѣто восемь или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, на каждой изъ которыхъ свободно могутъ двигаться по десяти деревянныхъ шаровъ. Кромѣ того, на отдѣльномъ брускѣ, или сверху рамки находятся нѣсколько вертикальныхъ проволокъ, на которыя можно надѣть отдѣльные шары. На этихъ проволокахъ можетъ быть разработана нумерація (у насъ обозначено число 3023).



Шведскіе счеты, конечно, не принадлежатъ къ числу тѣхъ учебныхъ пособій, которыя могутъ быть изготовлены самимъ учителемъ,—въ особенности, если онъ не знаетъ столярнаго мастерства. Но плотникъ или столяръ, при указаніяхъ учителя, можетъ изготовить раму на ножкахъ, которая составляетъ остовъ этого пособія. Вмѣсто шаровъ, если ихъ некому выточить, можно прибѣгнуть къ полымъ цилиндрамъ съ закругленными краями; проволока всегда можетъ быть куплена для счетовъ по болѣе или менѣе дешевой цѣнѣ, и соединеніе всѣхъ этихъ частей въ одно цѣлое не представитъ трудностей для человѣка, даже и не особенно искуснаго въ мастерствахъ. На стр. 25 дано изображеніе простѣйшаго устройства шведскихъ разборныхъ счетовъ.—Шведскіе счеты могутъ служить и вычислительнымъ инструментомъ, въ особенности на первыхъ ступеняхъ обученія, когда еще не приходится придавать проволокамъ условнаго значенія проволоки единицъ, проволоки десятковъ и т. д., подобнаго значеніямъ проволокъ русскихъ

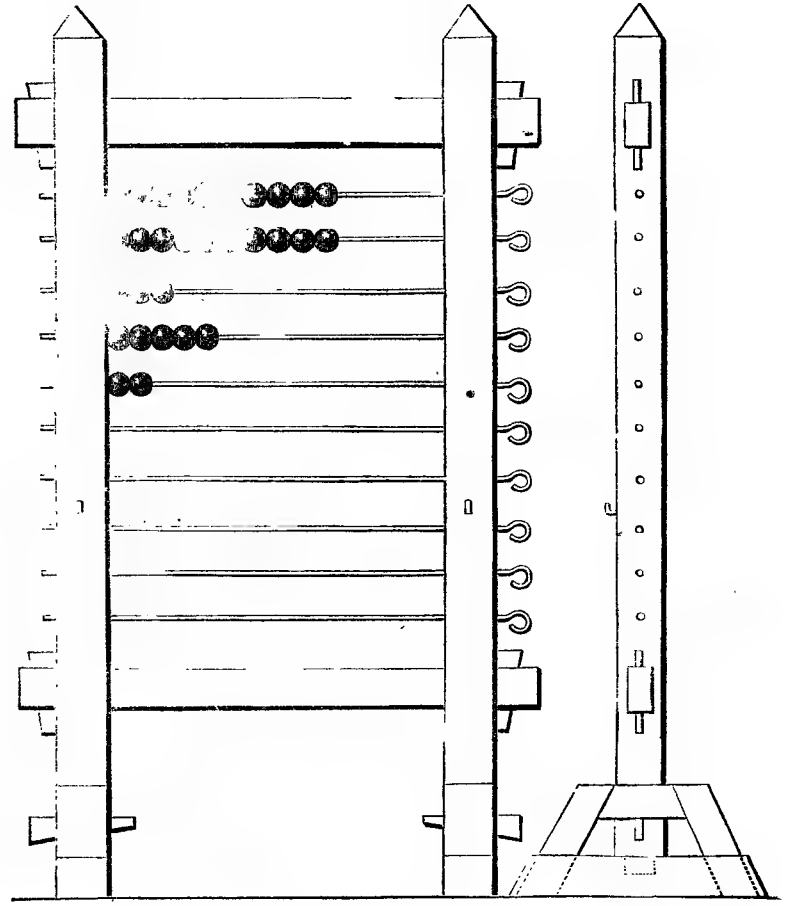
торговыхъ счетовъ. Лучше, въ употребленіе шведскихъ счетовъ в школѣ, не вносить этого, совершенно имъ чуждаго, условнаго значенія. Дѣло въ томъ, что нѣтъ наглядnаго сходства между письменнымъ обозначеніемъ чиселъ съ помощью цифръ, при которомъ цифры стоятъ рядомъ въ одной строкѣ, и условнымъ обозначеніемъ многозначныхъ чиселъ на шведскихъ счетахъ, при которомъ обозначенія чиселъ разныхъ разрядовъ стоятъ одно надъ другимъ. На шведскіе счеты надо смотрѣть преимущественно, какъ на наглядно-осязательное учебное пособіе, а не какъ на вычислительный инструментъ, могущій замѣнить русскіе счеты.

Вычислительные инструменты. § 5. Среди наглядно-вычислительныхъ инструментовъ первое мѣсто принадлежитъ, конечно, такъ называемымъ русскимъ торговымъ счетамъ.

Торговые счеты. а) Съ помощью торговыхъ счетовъ можно выполнять очень многія вычисленія, притомъ особенно легко—первыя два дѣйствія надъ многозначными числами. Торговые счеты у насъ извѣстны всѣмъ и каждому, а потому ихъ описаніе было бы излишнимъ. Должно, однако-же, замѣтить, что большій (противъ обыкновеннаго) размѣръ счетовъ для школьнаго, въ классѣ, употребленія не только желателенъ, но даже просто необходимъ для того, чтобы ученики, сидящіе далеко отъ доски, могли ясно различать отдѣльныя косточки счетовъ. Понятно, что тѣ школы, въ которыхъ нѣтъ такихъ счетовъ, но есть такъ называемые шведскіе, не должны пріобрѣтать непремѣнно торговые счеты, хотя шведскіе и не могутъ служить въ такой же мѣрѣ инструментомъ для вычисленія. Вспомнимъ, что въ шведскихъ счетахъ нельзя, какъ это замѣчено выше, придавать, безъ натяжки, проволокамъ, лежащимъ горизонтально, мѣстнаго разряднаго значенія: значенія проволоки единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д. Но гдѣ нѣтъ ни тѣхъ, ни другихъ счетовъ и гдѣ пріобрѣтеніе счетовъ обоего рода невозможно, тамъ придется ограничится пріобрѣтеніемъ торговыхъ счетовъ преимущественно предъ шведскими, такъ какъ первые сравнительно дешевле послѣднихъ и употребительны въ жизни. Но тогда мѣстное значеніе проволокъ должно быть введено уже послѣ того, какъ счеты отслужили свою службу въ качествѣ исключительно нагляднаго пособія. При этомъ вначалѣ будетъ замѣчаться нѣкоторая путаница въ обозначеніи чиселъ съ помощью косточекъ счетовъ, впрочемъ, подобная той, которая замѣчается вначалѣ и при усвоеніи нумераціи. Хорошо торговые классные счеты устраивать такъ, чтобы ихъ можно было вѣшать на стѣну и чтобы при

этомъ проволоки шли горизонтально, а косточки не скатывались всѣ въ одну сторону.

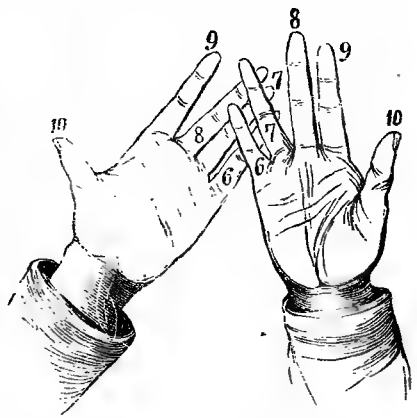
Значеніе счетовъ. Употребленіе торговыхъ счетовъ наиболѣе полезно при выясненіи: 1) письменнаго обозначенія чиселъ съ помощью арабскихъ цифръ, въ особенности чиселъ двузначныхъ, трехзначныхъ и



т. д., и 2) письменнаго производства сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ.—Этотъ превосходный вычислительный инструментъ въ качествѣ учебнаго пособія признается и въ Западной Европѣ. Но не слѣ-

дуетъ увлекаться слишкомъ частымъ его примѣненіемъ въ тѣхъ случаяхъ школьной практики, когда смѣло можно обойтись изустнымъ вычисленіемъ и когда вычисленіе письменное должно предпочитать вычисленію на счетахъ. По выраженію одного изъ современныхъ русскихъ педагоговъ, „земледѣльца нашего времени надобно уже представлять себѣ не съ однимъ плугомъ, какъ было прежде, но съ карандашемъ и счетами въ рукахъ“. Но счеты, даже малаго размѣра, какъ и плугъ, не всегда могутъ находиться въ рукахъ земледѣльца. Гораздо лучше, если земледѣлецъ, который, по выраженію того же педагога, „долженъ постоянно вести свои расчеты и наблюденія“, будетъ настолько владѣть и изустнымъ, и письменнымъ вычисленіемъ, что не будетъ безъ счетовъ безпомощенъ. Русскіе торговые счеты—вычислительный инструментъ, замѣняющій въ Россіи во многихъ случаяхъ письменное производство дѣйствій. Но въ благоустроенной школѣ они могутъ и должны быть только пособіемъ при обученіи ариѳметикѣ, а въ курсѣ этого предмета должны занимать только мѣсто пособія. Въ образованныхъ странахъ Европы (Англіи, Франціи, Германіи) счеты, какъ учебное пособіе, признаются. Но въ каждой изъ этихъ странъ въ жизни, на практикѣ, не только земледѣльцы, но даже служащіе въ торговыхъ учрежденіяхъ, гдѣ быстрота вычисленій особенно важна, предпочитаютъ вычисленіе письменное и изустное вычисленіямъ на счетахъ. И у насъ, какъ и на всемъ свѣтѣ, школа должна распространять грамотность и просвѣщеніе, по предмету же ариѳметики учить сознательному устному и письменному производству четырехъ дѣйствій, а не усиленно распространять употребленіе счетнаго инструмента, который получилъ у насъ особенно большое распространеніе именно въ силу незначительнаго развитія грамотности и просвѣщенія.

Пальцы рукъ. б) Не надо забывать, что къ числу наглядно-вычислительныхъ пособій принадлежатъ, въ особенности на первыхъ ступеняхъ обученія, всякіе предметы, и среди нихъ пальцы занимаютъ первое мѣсто. Пальцы помогаютъ вычисленію, притомъ преимущественно при отысканіи суммы какого-либо числа съ однозначнымъ, помощью присчитыванія. На первыхъ ступеняхъ запрещать дѣтямъ употребленіе пальцевъ съ этою цѣлью, отнюдь, не слѣдуетъ: это наглядно-вычислительное пособіе принадлежитъ, конечно, къ числу самыхъ естественныхъ. Надо только постепенно освобождать учениковъ отъ привычки всегда прибѣгать къ помощи пальцевъ, т. е. путемъ упражненій, довести до знанія такъ наз. таблицы сложенія.—Другое значеніе имѣютъ пальцы обѣихъ рукъ при усвоеніи дѣтьми труднѣйшей для усвоенія на-память части таблицы умноженія, начиная съ произведенія 6×6. Конечно, прежде чѣмъ приступить къ усвоенію дѣтьми на-память таблицы умноженія, должно убѣдиться въ томъ—понимаютъ ли они: 1) цѣль дѣйствія умноженія, 2) простѣйшіе случаи его примѣненія, и 3) цѣль усвоенія таблицы наизусть. Добираться до произведеній какимъ-нибудь образомъ, притомъ изустно, должны умѣть всѣ ученики, какъ бы много на это ни потребовалось труда, и объ этомъ рѣчь впереди. Въ свое время, лучше всего вести упражненія въ усвоеніи таблицы умноженія хоромъ, и провѣрять познанія учащихся—на каждомъ въ отдѣльности. Но, при усвоеніи труднѣйшей части таблицы умноженія на-память, весьма большія услуги можетъ оказать именно пальцевой, чисто-инструментальный, способъ усвоенія части таблицы умноженія, начинающейся съ произведенія 6×6. Этотъ способъ употреблялся древними римлянами, у которыхъ вообще было развито вычисленіе съ помощью приборовъ и пальцевъ.—Способъ этотъ, будучи занимателенъ, даетъ дѣтямъ орудіе для усвоенія труднѣйшей части таблицы умноженія наизусть, и на практикѣ приводятъ къ блестящимъ результатамъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: мизинецъ каждой руки обозначаетъ 6, безымянный палецъ — 7, средній—8, указательный—9, большой — 10. Чтобы узнать, сколько будетъ, напр., 8×7, надо (какъ показано на рисункѣ) сложить пальцы, обозначающіе **6** и **7** одной руки, съ пальцами, обозначающими 6, 7, и **8** другой; тогда каждый изъ сложенныхъ пальцевъ обозначаетъ десятокъ; въ данномъ случаѣ десятковъ будетъ 5; число же свободныхъ пальцевъ одной руки надо помножить на число свободныхъ пальцевъ другой,—въ данномъ случаѣ, стало-быть, 2 надо помножить на 3. Затѣмъ 5 дес. надо сложить съ полученнымъ призведеніемъ, и эта сумма (56) составитъ произведеніе 8×7.—Другой примѣръ: надо узнать, сколько будетъ 9×8; складываю пальцы, обозначающіе 6, 7, 8 и **9** на одной рукѣ, съ пальцами, обозначающими 6, 7 и **8**, на другой; получимъ 7 десятковъ$+2\times1$, т. е. 72, каковое число и есть произведеніе 9×8.—Третій примѣръ: 6×6; складываю пальцы обѣихъ рукъ, обозначающіе 6, т. е. мизинцы, получаю: 2 десятка$+4\times4$, т. е.



20+16, или 36, каковое число обозначаетъ произведеніе 6×6.— Этотъ способъ опредѣленія произведеній однозначныхъ чиселъ, не меньшихъ 6-ти, нерѣдко употребляется взрослыми понынѣ на югѣ Франціи, въ Италіи, въ Испаніи, особенно—въ Румыніи, а также у насъ, въ Малороссіи. Научныя основанія этого способа, конечно, не должны быть объясняемы учащемуся, такъ какъ они не довольно просты и такъ какъ въ нихъ не представляется надобности, при должной постановкѣ этого правила. Польза приведенной таблицы умноженія преимущественно практическая, хотя есть и педагогическая сторона дѣла. Учащійся не такъ скучаетъ усвоеніемъ наизусть этой части таблицы умноженія, благодаря наглядному пріему и благодаря возможности всякій разъ, при надобности, обратиться къ пріему, для ребенка представляющему и самостоятельный интересъ. По сдѣланнымъ пишущимъ эти строки наблюденіямъ, дѣти, по усвоеніи таблицы умноженія, перестаютъ пользоваться пальцами, хотя во время усвоенія это ихъ не мало интересуетъ *).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Пиѳагорова таблица умноженія.

в) Къ числу наглядно-вычислительныхъ пособій принадлежитъ такъ называемая Пиѳагорова таблица умноженія. Но особенно полезна она не въ обычной формѣ (см. выше).

Въ этой формѣ надо, какъ извѣстно, пользоваться правиломъ:

*) Что дѣти не будутъ знать причины, почему при указанныхъ условіяхъ получаются искомыя произведенія, въ томъ нѣтъ особенной бѣды: нач. школа (да и среднеучебное заведеніе) снабжаетъ учащагося многимъ множествомъ познаній и умѣній, основныя начала которыхъ учащемуся неизвѣстны. Такъ, напр., дѣтей учатъ писать „лѣто“ съ буквою *ѣ*, а слово „великій“ съ буквою *е*, не вдаваясь въ изслѣдованія относительно причинъ подобныхъ начертаній. Такимъ же образомъ учащіеся на-вѣру принимаютъ многія познанія въ исторіи, географіи, физики, химіи и др. областей человѣческаго знанія, въ которыхъ и для людей науки гораздо болѣе неизвѣстнаго, чѣмъ достовѣрно-извѣстнаго, какъ только вопросъ касается причинъ тѣхъ или другихъ явленій. Факты пальцевой таблицы произведеній, начинающейся 36-ю, для учащихся будутъ только фактами, и въ этомъ нѣтъ ничего предосудительнаго, какъ не предосудительно учить дѣтей писать слово мнѣ съ буквою *ѣ*, а меня—съ буквою *е*, не объясняя имъ причины этихъ начертаній.

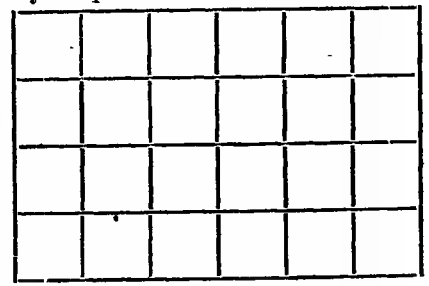
„чтобы найти 6×7, веди пальцемъ по строкѣ, начинающейся числомъ 6, до тѣхъ поръ, пока дойдешь до столбца, начинающагося числомъ 7“, и т. д. Пиѳагорова таблица въ этой, обычной формѣ, къ сожалѣнію, не особенно полезна. На самомъ же дѣлѣ, если ее развить на глазахъ учащагося, то она полезна не только для цѣлей обученія ариѳметикѣ, но и для усвоенія учениками вѣрнаго представленія о площади прямоугольнаго четыреугольника, а также и въ смыслѣ развивательномъ.—Предположимъ, что надо разработать таблицу умноженія 6-ти на разныя цѣлыя числа. Беру одну клѣтку и ставлю въ ней цифру 1, къ ней приставляю еще клѣтку, въ которую ставлю цифру 2, и т. д. вплоть до шестой клѣтки включительно (можно, впрочемъ, этихъ цифръ и не писать!):

1	2	3	4	5	6

Присоединяю къ этому ряду клѣтокъ еще одинъ рядъ такихъ же клѣтокъ, и записываю въ послѣдней—число 12, т. е. число всѣхъ клѣтокъ въ обоихъ рядахъ. Такъ поступаю еще съ однимъ рядомъ клѣтокъ, и т. д. Если ученики это дѣлаютъ постепенно, т. е. такъ, чтобы клѣтки съ цифрами постепенно и притомъ,

1	2	3	4	5	6
					12

при полномъ уразумѣніи учениками всего происходящаго предъ ихъ глазами и при участіи ихъ во всей работѣ, появлялись на чертежѣ, и если продолжать эту операцію до любого предѣла, то въ концѣ-концовъ получатся части такъ называемой Пиѳагоровой таблицы. Напр., та часть таблицы, гдѣ изображено четырежды шесть, не только уму и воображенію учащагося будетъ гораздо болѣе говорить, но и уму и воображенію учителя,



скажетъ гораздо болѣе, чѣмъ сколько та же таблица говоритъ въ готовомъ видѣ. Упражненіе въ собственноручномъ изготовленіи учениками (на глазахъ учителя) подобной развивающейся таблицы не только сослужитъ великую службу усвоенію на-память таблицы умноженія, но и общему развитію учащагося. Послѣдній пойметъ, что изобрѣтеніе этой таблицы не напрасно приписывается какому-то греческому мудрецу (по имени Пиѳагоръ), жившему въ VI в. до Р. Хр. Не для чего прибавлять, что и развитію нѣкотораго геометрическаго смысла эта таблица, въ указанной формѣ, окажетъ также не мало услугъ и пользы. Измѣреніе площадей прямоугольниковъ, во всякомъ случаѣ, будетъ впослѣдствіи для учащагося не чѣмъ-то новымъ и труднымъ, а ученіемъ знакомымъ и легко доступнымъ.—Заключать Пиѳагорову таблицу въ утолщенную рамочку (какъ это обыкновенно дѣлается), конечно, не для чего. Полезно, напротивъ, выяснить учащемуся, что такимъ образомъ, т. е. съ помощью счета клѣтокъ, можно составить таблицу произведеній какихъ угодно двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое значительно больше девяти, но что это было бы слишкомъ громоздко и долго. Надо только соблюдать правило, чтобы ученики, нарисовавъ два ряда клѣтокъ, всякій разъ сосчитали, сколько всего клѣтокъ въ данномъ прямоугольникѣ, и сказали бы вслухъ: „дважды шесть двѣнадцать“, а нарисовавъ три ряда, сосчитали и сказали бы: „трижды шесть восемнадцать“, и т. д., и т. д.

Таблица для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ.

г) Къ числу пособій, служащихъ для усвоенія учениками способовъ вычисленія, принадлежатъ таблицы, на которыхъ напечатанъ рядъ цифръ и ихъ совокупностей. „Таблица для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“ въ маломъ видѣ изображена на стр. 31-й.

Выписывать каждый день, на время, рядъ цифръ на доскѣ, конечно, неудобно. Гораздо лучше повѣсить подобную таблицу на одну изъ свободныхъ стѣнъ классной комнаты, съ тѣмъ, чтобы къ таблицѣ можно было съ любымъ отдѣленіемъ класса обращаться во всякое время. Устройство моей „Таблицы“ слѣдующее. Въ верхней строкѣ — первыя девять цифръ, къ которымъ можно обращаться на той ступени обученія, когда дѣти усваиваютъ себѣ ихъ начертанія: учитель, показывая палочкою на цифру, заставляетъ учениковъ, поодиночкѣ и хоромъ, называть показываемую цифру. Кромѣ того, онъ можетъ, называя числа, заставлять отдѣльныхъ учениковъ показывать соотвѣтствующія цифры. Проходя таблицу сложенія однозначныхъ чиселъ, учитель не произноситъ ни слова, но предваряетъ учениковъ о томъ, что они должны произносить показываемыя имъ цифры и прибавлять означаемыя числа одно къ другому. То же надо дѣлать при

усвоеніи таблицы вычитанія, при сложеніи нѣсколькихъ однозначныхъ слагаемыхъ, при усвоеніи таблицы умноженія. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ учитель долженъ предварить, что первое число они должны называть

1	2	3	4	5	6	7	8	9
13		14	15		11	16		19
10		20	21		24	27		26
40		50	60		70	80		90
36		49	64		81	91		93
23		37	43		54	97		73
76		84	86		88	92		94
75		68	66		62	69		38
59		95	57		51	68		79

такъ: „дважды“, „трижды“, „четырежды“, „пятью“, и т. д. или „два раза“, „три раза“, и т. д., а второе число должны называть просто: пять, шесть, четыре, три и т. д. Соблюдая тактъ, учитель легко можетъ пріучить къ размѣренному, по такту, повторенію таблицы умноженія въ одиночку и хоромъ.—Второй рядъ обозначеній въ „Таблицѣ“ содержитъ въ себѣ шесть двузначныхъ чиселъ второго десятка, и эти обозначенія могутъ служить: для уясненія состава подобнаго числа изъ десятка и нѣск. отдѣльныхъ единицъ, для упражненій въ опредѣленіи, которое изъ чиселъ больше, для упражненій въ сложеніи двухъ чиселъ второго десятка, въ вычитаніи, въ умноженіи чиселъ второго десятка на 2, въ называніи тѣхъ чиселъ второго десятка, которыхъ нѣтъ въ этомъ ряду, и т. п.—Третья строка содержитъ на первомъ мѣстѣ обозначенія десятка и двухъ десятковъ и четырехъ чиселъ третьяго десятка. Числа 10 и 20 умышленно поставлены не во вторую, а въ третью строку, притомъ рядомъ: мы увидимъ ниже, что письменному обозначенію этихъ двухъ чиселъ надо научить (дабы было соблюдено начало Коменскаго о необходимости преодолѣнія каждый разъ только по одной трудности) уже послѣ того, какъ ученики свободно обозначаютъ числа второго десятка.—Четвертый рядъ содержитъ только обозначенія восьми чиселъ, содержащихъ круглое число десятковъ: при сложеніи и вычитаніи круглыхъ чиселъ этотъ рядъ оказываетъ очень большія услуги.—Средній рядъ содержитъ четыре квадрата (6×6, 7×7, 8×8 и 9×9) и два числа 91 и 93, изъ которыхъ первое представляетъ собою произведеніе 13-ти на 7, а второе—произведеніе 31-го 3, которыя могутъ пригодиться при дѣленіи двузначнаго числа безъ остатка.—Слѣдующій (четвертый снизу) рядъ чиселъ содержитъ только одно число, разложимое на множителей (а именно 54), остальныя числа—первоначальныя, что удобно для упражненія въ дѣленіи

съ остаткомъ.—Остальныя три ряда двузначныхъ чиселъ очень удобны для упражненій въ раздѣленіи на 2, нѣкоторыхъ на 3, на 4, на 5, на 6, и т. п.—Не всѣ двузначныя числа расположены въ порядкѣ возрастающемъ: во 2-мъ ряду число 11 стоитъ среди чиселъ, большихъ его, въ шестомъ ряду 73 стоитъ послѣ 97-ми, и т. д. Сдѣлано это не безъ умысла: 11—число, обозначенію котораго надо дѣтей научить (по началу Коменскаго) послѣ того, какъ ими уже усвоено обозначеніе другихъ чиселъ второго десятка, въ которыхъ число отдѣльныхъ единицъ *отличается* отъ числа отдѣльныхъ десятковъ.—Что касается 38-ми, стоящихъ послѣ 69, то это число и другія (не многія того же рода) взяты для того, чтобы ученики не думали, что непремѣнно каждое слѣдующее въ „Таблицѣ“ число должно быть больше каждаго изъ ему предшествующихъ. Для упражненія въ наглядномъ отысканіи дѣтьми одинаковыхъ чиселъ, на незначительномъ одно отъ другого разстояніи, напечатано одно и то же число 68.—„Таблица“ эта, при надлежащемъ ея употребленіи въ классѣ, приводитъ къ очень хорошимъ результатамъ. Среди урока, послѣ письменнаго вычисленія, можно заставить одно отдѣленіе встать и обратиться лицомъ къ „Таблицѣ“ и начать упражненія въ изустномъ вычисленіи: взявъ въ руки палочку, учитель (смотря по надобности) предупреждаетъ, что дѣти должны все показываемое либо прибавлять, либо все вычитать, либо первыя два числа сложить, слѣдующее—вычесть, четвертое—опять прибавить, пятое—опять вычесть, и т. д. Учитель можетъ, показывая число, сказать: „прибавить“, потомъ, показавъ слѣдующее число, сказать: „помножить“, затѣмъ—„вычесть“, и т. д. Классъ же, пріученный къ соблюденію такта, по указанію и безмолвной командѣ учителя, можетъ хорошо, въ теченіе двухъ-трехъ минутъ и долѣе, поупражняться въ почти самостоятельномъ изустномъ вычисленіи, которое является ступенью переходною отъ изустныхъ вычисленій подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя къ изустнымъ, совершенно самостоятельнымъ, вычисленіямъ. Благодаря этимъ класснымъ, съ помощью „Таблицы“, вычисленіямъ, при которыхъ ученики стоятъ, а учитель почти не говоритъ, классъ освѣжается, а учитель нѣсколько отдыхаетъ. Въ особенности этотъ отдыхъ нуженъ тѣмъ учителямъ, которые, къ сожалѣнію, склонны къ слишкомъ громкому веденію урока,—отъ каковой склонности, какъ извѣстно, очень трудно, хотя и слѣдуетъ, освободиться.—Въ Германіи, въ школахъ подобныя таблицы или изготовляются на доскѣ предъ урокомъ самимъ учителемъ (что, конечно, не всегда удобно), или же имѣются налицо. Песталоцци и его ученики выполняли подобныя вычисленія съ помощью другихъ таблицъ (не-цифирнаго содержанія) и, какъ это извѣстно изъ исторіи методики, достигали, благодаря этимъ упражненіямъ, очень значительной власти учениковъ надъ изустными вычисленіями. Изъ практики извѣстно, что дѣти, всегда вычисляющія по полному требованію учителя, пріучаются изустно вычислять только по этому полному требованію, какъ бы поддаваясь внушенію и толчку учителя. Но они за-то оказываются слабыми въ *самостоятельныхъ* изустныхъ вычисленіяхъ, переходъ къ которымъ и облегчается описанною выше „Таблицею“. Сверхъ того, „Таблица“ можетъ быть полезна при задаваніи ученикамъ самостоятельныхъ работъ.

§ 6. Наглядно-измѣрительными пособіями являются, при обученіи ариѳметикѣ, конечно, прежде всего модели (образцы) единицъ мѣры. *Модели единицъ мѣры.*

а) Для выясненія и укрѣпленія въ умѣ учащагося представленій и понятія о величинахъ, единицахъ мѣры и измѣреніи, прямо необходимо собраніе мѣръ длины и вѣса, хотя бы самыхъ важныхъ въ жизни: 1) аршинъ съ подраздѣленіями на вершки и футъ съ подраздѣленіями на дюймы, 2) фунтовая гиря въ обычной въ торговлѣ формѣ, допускающей взвѣшиваніе и частей фунта, или же фунтовая и золотниковая гири, 3) модель четверика.—Производство раздробленія и превращенія именованныхъ чиселъ и производство четырехъ дѣйствій надъ этими числами лишены всякой основы, если ученики только на-память знаютъ единичныя отношенія мѣры и не имѣютъ наглядныхъ представленій о томъ, что они на-память знаютъ. Крайне неестественною надо считать такую постановку помянутыхъ выше ученій, при которой ученикъ не сознаетъ — что больше: аршинъ или футъ, при которой ученикъ не представляетъ себѣ, что аршинъ содержитъ 28 дюймовъ, а футъ—только 12, что футъ, поэтому, меньше половины аршина на 2 дюйма, и т. п. Въ этомъ смыслѣ крайне полезно измѣрить съ дѣтьми главнѣйшіе размѣры и величины, встрѣчающіеся въ обыденной школьной жизни: длину и ширину листа бумаги, стола, доски, длину цѣлаго карандаша, вѣсъ нѣкоторыхъ предметовъ, ростъ нѣк. учениковъ и учителя, и т. п. Употребленіе моделей понятно само собою.—Что касается понятія объ измѣреніи, то оно не представляетъ затрудненій, если учитель не забудетъ начала наглядности (по возможности осязательной) ради кажущагося ускоренія дѣла. Только въ крайнемъ случаѣ можно удовлетвориться *изображеніемъ* единицъ мѣры на доскѣ, что, впрочемъ, для единицъ вѣса, конечно, не достаточно ни въ какомъ случаѣ. Весьма важно, чтобы въ школѣ были хоть какіе-нибудь вѣсы, — въ крайнемъ случаѣ хотя бы даже только пружинные, стоимость которыхъ въ настоящее время очень невелика (около одного рубля).

б) Существуютъ въ продажѣ таблицы, на которыхъ изображены главнѣйшія единицы длины. Такія таблицы содержатъ изображеніе многихъ мѣръ и сначала слишкомъ развлекаютъ вниманіе учениковъ. Полезно, поэтому, перенести занимающія въ данное время учениковъ мѣры съ таблицы также на классную доску. *Таблица мѣръ.*

Мѣры длины. в) На классную доску или, вѣрнѣе — на края ея, должны быть перенесены и отмѣчены надрѣзомъ нѣкоторыя мѣры длины: аршинъ (съ одной стороны доски), футъ (съ другой стороны), а также метръ и т. п., дабы хоть мѣры длины были всегда у учениковъ предъ глазами.

Геометрич. пособія. § 7. Наглядно-геометрическія средства для усвоенія дѣтьми вѣрныхъ геометрическихъ представленій сводятся преимущественно къ чертежамъ, выполняемымъ учениками и учителемъ на доскѣ, и учениками въ своихъ тетрадяхъ, притомъ безъ помощи линейки и циркуля. При разумной постановкѣ обученія, ученики должны научиться выполнять простѣйшіе чертежи, какъ отъ руки, такъ и съ помощью линейки и циркуля: они должны правильно проводить прямыя линіи, строить прямыя углы, квадраты, и т. д. Измѣреніе площадей и усвоеніе единичныхъ отношеній квадратныхъ единицъ мѣры должны начинаться не съ усвоенія на-память этихъ отношеній и даже не съ чертежей, а съ нагляднаго измѣренія площадей заготовленныхъ (изъ газетной или другой бумаги) квадрата въ аршинъ и квадрата въ футъ длиною, и съ измѣренія площадей прямоугольниковъ, находящихся по возможности предъ глазами учениковъ. Для выясненія и выработки представленія объ объемѣ прямоугольнаго параллелепипеда и куба, должно прибѣгнуть къ имѣющимся подъ руками кубикамъ. Вообще желательно, чтобы ученики не на вѣру только воспринимали, а зрѣніемъ и съ помощью работы воображенія составили себѣ вѣрныя геометрическія представленія.— Къ числу наглядно-геометрическихъ пособій принадлежитъ, конечно, также и развивающаяся, на глазахъ учениковъ и при ихъ участіи, Пиѳагорова таблица умноженія, которая, такимъ образомъ, можетъ играть, какъ это замѣчено и выше, двоякую роль.

Общее правило относительно наглядныхъ пособій. § 8. Кромѣ того правила относительно употребленія наглядныхъ пособій при обученіи ариѳметикѣ, по которому къ каждому изъ нихъ слѣдуетъ прибѣгать только въ тѣхъ случаяхъ, когда именно оно наиболѣе цѣлесообразно достигаетъ намѣченной цѣли, надо соблюдать еще одно. Посредствомъ наглядныхъ пособій должно, въ виду самой цѣли обученія ариѳметикѣ. выяснять преимущественно дѣйствія надъ числами и способы ихъ производства. а не результаты этихъ дѣйствій. Важно, напр., не то, чтобы ученикъ

на пособіи сосчитали, что 3 раза 4 составитъ 12, и что 4 раза 3—тоже 12, а то, чтобы они на наглядномъ пособіи поняли, постигли—почему это такъ, а не иначе. Другой примѣръ: если ученики и учитель на извѣстной ступени разсчитываютъ, сколько получится отъ сложенія 8-ми съ 7-мью, то не то важно, что ученики могутъ сосчитать, сколько получится отъ этого сложенія, а то, чтобы ученики увидѣли — какъ это надо разсчитывать, а именно, что для этого надобно сначала къ 8-ми прибавить 2 (дабы получить десятокъ), а потомъ къ десятку присоединить остальныя 5 единицъ. Благодаря наглядными пособіямъ и дѣйствіямъ, на самомъ дѣлѣ производимымъ надъ ними, ученикъ долженъ получить представленіе о дѣйствіяхъ надъ числами, о самомъ смыслѣ дѣйствія, о способѣ его производства, объ основаніяхъ, по которымъ что-нибудь дѣлается такъ, а не иначе, и т. п., а не о томъ только, что въ результатѣ получится столько-то единицъ. [На какихъ ступеняхъ какія именно пособія наиболѣе умѣстны—подробно указано въ „Ариѳметическихъ задачникахъ для учителей“ (выпуски I и II, изъ коихъ первый предназначенъ для учителей одноклассныхъ начальныхъ школъ, а второй—для учителей тѣхъ уч. зав., ученики которыхъ уже усвоили себѣ курсъ одноклассной школы), а также ниже, въ указаніяхъ относительно каждой изъ ступеней обученія.]

Два рода задачъ. § 9. Задачи, извѣстныя подъ именемъ ариѳметическихъ, несмотря на все свое разнообразіе, могутъ быть точно распредѣлены на два класса: 1) задачи чисто-ариѳметическія и 2) задачи алгебраическія. Для того, чтобы уяснить себѣ разницу между чисто-ариѳметическими и алгебраическими задачами, займемся разрѣшеніемъ трехъ задачъ, причемъ, прибѣгнувъ къ обозначенію искомаго числа какою-либо буквою (напр. буквою x), составимъ уравненія, т. е. равенства, выражающія связь данныхъ чиселъ съ искомыми. Задачи пусть будутъ слѣдующія:

1) Торговецъ разсчиталъ, что если онъ весь остатокъ своего ситца станетъ продавать по 8-ми коп. за аршинъ, то онъ понесетъ при этомъ убытку 92 р.; если бы онъ сталъ продавать его по 10-ти коп., то онъ получилъ бы 28 руб. прибыли. Сколько у него оставалось ситца?

2) Нѣкто купилъ 7 аршинъ сукна по 3 руб. за аршинъ и 5 аршинъ бархата по 7 р. за аршинъ; послѣ этого у него осталось столько денегъ, что на нихъ онъ могъ бы купить еще два аршина сукна, по 4 р., и три аршина бархата, по 6 р. за арш. Спрашивается—сколько у него было денегъ до покупки?

3) У торговца было 2 400 руб. наличныхъ денегъ; онъ, въ теченіе дня, выручилъ за проданный имъ товаръ еще 76 руб. 50 коп. Спрашивается—сколько у него всего оказалось денегъ по прошествіи этого дня?

Читателю, вѣроятно, извѣстенъ изъ алгебры тотъ способъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ, который приводитъ къ уравненію, т. е. къ равенству двухъ выраженій, въ каждое или въ одно изъ которыхъ входятъ: искомая величина и нѣкоторыя изъ данныхъ. Неизвѣстное, искомое число обозначаютъ, при подобномъ пріемѣ рѣшенія, какою-либо изъ послѣднихъ буквъ латинской азбуки (x, y, z); затѣмъ надъ величиною, которую обозначаетъ эта буква, совершаютъ всѣ тѣ дѣйствія, на которыя наталкиваютъ условія задачи. Вся трудность заключается въ отысканіи двухъ такихъ выраженій, которыя обладали бы тѣмъ свойствомъ, чтобы, выражая одну и ту же величину, они въ то же время были различны по виду и выведены изъ различныхъ условій задачи. Въ ариѳметикѣ къ подобному пріему, конечно, прибѣгать не слѣдуетъ, и если выше въ общихъ чертахъ описанъ этотъ пріемъ, то исключительно съ цѣлью точнаго установленія различія между задачами различныхъ двухъ родовъ.

Первая изъ заданныхъ выше задачъ разрѣшается, помощью описаннаго выше пріема, слѣдующимъ образомъ. Пусть все число аршинъ ситца, оставшагося у торговца, равно x. Продавъ весь ситецъ по 8 коп. за аршинъ, онъ, по условію задачи, всего выручилъ бы $8 \times x$ копеекъ и при этомъ понесъ бы 92 рубля убытка; стало-быть, весь ситецъ стоилъ ему самому

$$8 \times x + 9\,200$$

коп. *). Продавъ же весь ситецъ по 10 копеекъ за аршинъ, торговецъ, согласно другому условію задачи, выручилъ бы $10 \times x$ копеекъ и при этомъ получилъ бы 28 руб. прибыли; стало-быть, весь ситецъ ему самому стоилъ

$$10 \times x - 2800$$

копеекъ **). Мы получили два выраженія:

$$8 \times x + 9200 \text{ и } 10 \times x - 2800,$$

изъ которыхъ каждое, въ различной формѣ, выражаетъ одну и ту же величину, а именно — стоимость всего, оставшагося у торговца, ситцу. Поэтому можемъ утверждать, что если буква x обозначаетъ количество аршинъ имѣющагося у торговца ситцу, то

$$8 \times x + 9200 = 10 \times x - 2800.$$

Это равенство и представляетъ собою нѣкоторое уравненіе, на основаніи котораго можно различными способами вычислить величину неизвѣстнаго числа, числовое значеніе буквы x, т. е. количество аршинъ оставшагося у торговца ситца.—На способахъ отысканія неизвѣстной даннаго уравненія мы останавливаться не станемъ: они для насъ въ данномъ случаѣ не важны. Для насъ важно только то обстоятельство, что существуютъ задачи, которыя обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: обозначивъ

*) $8 \times x$ выражаетъ нѣкоторое число копеекъ, поэтому и 92 рубля выражены въ копейкахъ.

**) $10 \times x$ выражаетъ нѣкоторое число копеекъ, поэтому и 28 рублей выражены въ копейкахъ.

неизвѣстную въ нихъ величину буквою x, мы, основываясь на условіяхъ задачи, производимъ надъ этою величиною два дѣйствія (разъ мы на x умножаемъ 8, а другой разъ—на ту величину умножаемъ 10). Кромѣ того, мы надъ полученными намъ неизвѣстными произведеніями производимъ еще два дѣйствія.—Точно также существуютъ и такія задачи, при разборѣ которыхъ приходится надъ неизвѣстными величинами производить нѣсколько дѣйствій *).

Рѣшеніе второй изъ выше приведенныхъ задачъ, по примѣненіи того же алгебраическаго пріема, приводитъ только къ одному дѣйствію надъ неизвѣстнымъ числомъ, а при нѣкоторой сообразительности—даже и одного дѣйствія надъ неизвѣстною величиною не потребуетъ. Дѣйствительно: пусть у даннаго лица было x до сдѣланной имъ покупки; купивъ 7 аршинъ сукна, оно истратило 3 р. $\times$ 7, т. е. 21 рубль; на бархатъ же оно истратило 7 р. $\times$ 5, т. е. 35 руб.; итого оно истратило 21 р. $+$ 35 р., т. е. 56 рублей. Но, по условію задачи, у этого лица осталось столько денегъ, что оно могло купить еще 2 аршина сукна по 4 рубля и 3 аршина бархата по 6-ти рублей за аршинъ; стало-быть, оно могло истратить еще

$$4 \text{ р.} \times 2 + 6 \text{ р.} \times 3, \text{ т. е. } 26 \text{ р.};$$

поэтому

$$x - 56 = 26, \text{ или же } x = 56 + 26.$$

Т. е.: бывшее у этого лица число рублей равно суммѣ тѣхъ денегъ, которыя оно на самомъ дѣлѣ истратило, и тѣхъ, которыя оно, кромѣ того, могло истратить.—Изъ этого рѣшенія до очевидности ясно, что надъ количествомъ x мы, при рѣшеніи задачи, могли совершить только одно дѣйствіе,—никакъ не болѣе, и что въ такомъ случаѣ мы въ результатѣ получили бы извѣстное число, для вычисленія котораго надъ x-омъ ужъ никакихъ дѣйствій не требовалось. Отсюда заключаемъ, что существуютъ такія задачи, которыя обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: обозначивъ въ нихъ неизвѣстное число буквою x и произведя всѣ дѣйствія, вытекающія изъ условій задачи, мы должны надъ величиною, которая обозначена у насъ буквою x, произвести только одно изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, причемъ въ результатѣ получается извѣстное число. Таковы, напр., задачи: къ какому числу надо прибавить 8, чтобы получить 30? Какое число надо прибавить къ 17-ти, чтобы получить 30? Какое число надо вычесть изъ 25-ти, чтобы получить 13? Изъ какого числа надо вычесть 25, чтобы получить 13? И т. п. **).

*) Тотъ способъ рѣшенія задачи, при которомъ рѣшающій не прибѣгаетъ къ помощи уравненія, для насъ въ данную минуту не важенъ. Поэтому мы на немъ не останавливаемся. Этотъ способъ обыкновенно называется ариѳметическимъ, хотя гораздо вѣрнѣе его называть способомъ не-алгебраическимъ, а еще вѣрнѣе—не-буквеннымъ.

**) Какъ ни просты задачи: какое число надо вычесть изъ 28-ми для того, чтобы получить то же самое число, которое мы вычли, и на какое число надо раздѣлить 25, чтобы получить число, равное дѣлителю, но эти задачи не принадлежатъ уже къ числу только-что разсмотрѣнныхъ, такъ какъ въ этихъ задачахъ въ результатѣ дѣйствія надъ неизвѣстнымъ числомъ получается опять-таки неизвѣстное число.

Обратимся теперь къ третьей задачѣ; обозначивъ въ ней неизвѣстное намъ число копеекъ, оказавшихся у торговца по истеченіи дня, мы получимъ, что

$$x = 240\,000 + 7\,630.$$

Есть безчисленное множество задачъ, которыя обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: обозначивъ искомое число буквою x, мы, при рѣшеніи задачи, надъ x-омъ не должны, пользуясь условіями задачи, производить никакихъ дѣйствій.

Полная классификація задачъ.

§ 10. Условимся различать среди задачъ, обыкновенно предлагаемыхъ въ такъ наз. ариѳметическихъ задачникахъ, задачи двоякаго рода: а) задачи чисто-ариѳметическія и б) задачи алгебраическаго характера. Чисто-ариѳметическими будемъ называть какъ задачи, при рѣшеніи которыхъ мы, обозначивъ неизвѣстное буквою x, надъ x-омъ, по условіямъ задачи, не обязаны производить никакого дѣйствія, такъ и задачи, при рѣшеніи которыхъ, съ помощью икса, надъ послѣднимъ производится только одно дѣйствіе, въ результатѣ котораго получается извѣстное число. Задачами алгебраическаго характера условимся называть какъ задачи, при рѣшеніи которыхъ съ помощью икса, мы, обозначивъ искомое число буквою x, надъ нимъ производимъ дѣйствіе, надъ полученнымъ новое дѣйствіе и т. д., такъ и такія, при рѣшеніи которыхъ съ помощью икса, мы производимъ надъ x-омъ одно дѣйствіе, но въ результатѣ получаемъ опять неизвѣстное число.

Чисто-ариѳметическія задачи можно различать двухъ родовъ: 1) задачи, для разрѣшенія коихъ требуется приложеніе только одного изъ четырехъ дѣйствій, и 2) задачи, для разрѣшенія коихъ требуется приложеніе двухъ или болѣе дѣйствій. Первый классъ чисто-ариѳметическихъ задачъ условимся называть простыми, второй — сложными, независимо отъ легкости или трудности ихъ разрѣшенія для ребенка, на той или другой ступени обученія.

Задачи простыя, въ свою очередь, можно различать двоякаго рода: а) задачи, въ которыхъ условія такъ очевидны, что и дѣйствіе, требуемое для рѣшенія задачи, совершенно очевидно, и б) задачи, для разрѣшенія которыхъ требуется нѣкоторое умозаключеніе. — Пусть, напр., предложена задача; „на столѣ лежатъ 4 кубика, а я туда положу еще 3 кубика; сколько послѣ этого будетъ кубиковъ на столѣ?“ Эта задача можетъ затруднить ученика не по смыслу своему, а только въ томъ отношеніи, что онъ затрудняется отвѣтить на вопросъ, т. е. произвести дѣйствіе. Если же онъ и смысла ея не понимаетъ, то никакія умозаключенія и разсужденія не помогутъ ребенку въ ея уразумѣніи: онъ для нея либо слишкомъ малъ, либо же его разумѣніе вообще слабо.—Другое дѣло, если ребенку предложена слѣдующая задача: „на столѣ лежали кубики; я снялъ со стола 3 кубика, и послѣ этого на немъ осталось 4 кубика; сколько на немъ было кубиковъ?“ Здѣсь можно разсуждать: я снялъ 3, стало-быть, на немъ лежали эти 3 кубика; на немъ осталось 4 кубика; стало-быть, эти 4 кубика и раньше тоже лежали на столѣ; поэтому на столѣ лежали 4 да еще 3 кубика. Эта послѣдняя задача представляетъ собою простую задачу второго рода.

Сложныя чисто-ариѳметическія задачи отличаются одна отъ другой не только степенью сложности, т. е. не только числомъ дѣйствій, требующихся для ихъ рѣшенія. Онѣ бываютъ двухъ родовъ. Въ однѣхъ вся задача изложена такъ, что условія, приводящія къ разрѣшенію одного изъ промежуточныхъ вопросовъ, приведены рядомъ, и задача, вслѣдствіе этого, безъ всякаго анализа разрѣшается очень быстро. Такова, напр., сложная задача, гласящая такъ: „Лавочникъ купилъ 15 фунтовъ кофе по 32 к. за фунтъ и 25 фунтовъ сахару по 15 коп. за фунтъ. Сколько онъ могъ бы купить чаю на тѣ же деньги, если фунтъ чаю стоитъ 2 р. 85 коп.?“ Къ числу задачъ того же рода принадлежитъ, напр., также сложная задача, гласящая такъ: „У землевладѣльца было 524 четверти овса; половину этого количества онъ продалъ, половину оставшагося овса употребилъ на посѣвъ, а изъ остального овса отдалъ сосѣду 24 четверти 5 четериковъ и 7 гарнцевъ въ уплату своего долга. Сколько овса у него осталось?“ Но сложныя чисто-ариѳметическія задачи могутъ быть составлены и чаще всего составляются такъ, что условія, тѣсно одно къ другому примыкающія, стоятъ не рядомъ, а отдѣлены одно отъ другого однимъ или нѣсколькими такими условіями, которыя надо на время оставить безъ вниманія, пользуясь при рѣшеніи тѣснѣе примыкающими другъ къ другу условіями. Такова, напр., сложная задача, гласящая такъ: „Въ свѣчной лавкѣ 4 ящика свѣчей, въ каждомъ ящикѣ по $3\frac{1}{2}$ пуда; кромѣ того, въ ней 8 бочекъ керосину, 5 бочекъ деревяннаго масла и одинъ ящикъ спичекъ. Что стоитъ фунтъ свѣчей, если всего въ лавкѣ

товару на 253 руб. 40 коп. и если бочка керосину стоитъ 10 руб. 25 коп., бочка деревяннаго масла—9 руб. 50 коп., а ящикъ спичекъ—70 коп.?"—Здѣсь только первыя два условія (по которымъ въ лавкѣ 4 ящика и въ каждомъ ящикѣ по $3^1/_2$ пуда свѣчей) тѣсно примыкаютъ другъ къ другу и прямо приводятъ къ рѣшенію одного изъ вопросовъ, которые надо разрѣшить для разрѣшенія задачи. Третье условіе, по которому въ лавкѣ, кромѣ того, 8 бочекъ керосину, со слѣдующимъ (по которому въ ней также 5 бочекъ масла) не связано ариѳметически, т. е. не даетъ такихъ чиселъ, надъ которыми можно было бы совершить дѣйствіе для разрѣшенія какого-либо изъ нужныхъ вопросовъ. Четвертое условіе (по которому въ лавкѣ находится одинъ ящикъ спичекъ) и пятое (по которому всего товару въ лавкѣ на 253 р. 40 коп.) отдѣляютъ отъ третьяго то условіе (въ задачѣ помѣщенное на шестомъ мѣстѣ), которое тѣсно примыкаетъ, по сущности задачи, къ третьему и по которому бочка керосину стоитъ 10 руб. 25 коп., и т. д. Размѣстивъ условія этой задачи сообразно съ внутреннею связью условій, мы получимъ слѣдующую задачу, рѣшеніе которой уже не требуетъ должнаго сочетанія условій: „Въ свѣчной лавкѣ было 8 бочекъ керосину, каждая стоимостью въ 10 руб. 25 коп., 5 бочекъ деревяннаго масла, каждая стоимостью въ 9 р. 50 коп., и одинъ ящикъ спичекъ стоимостью въ 70 коп.; кромѣ того, въ ней были и свѣчи; всего товару было тамъ на 253 руб. 40 коп.; свѣчей было въ лавкѣ 4 ящика, а въ каждомъ ящикѣ—по $3^1/_2$ пуда свѣчей; въ пудѣ, какъ извѣстно, 40 ф. Спрашивается, что стоитъ фунтъ этихъ свѣчей?"

Сложныя чисто-ариѳметическія задачи, въ которыхъ условія изложены въ томъ порядкѣ, который наиболѣе отвѣчаетъ порядку требуемыхъ дѣйствій, условимся называть приведенными къ ряду простыхъ задачъ, а задачи съ условіями, этому порядку не отвѣчающими—неприведенными.

Задачи алгебраическаго характера *) для цѣлей наилучшаго ихъ усвоенія учениками полезно, какъ и въ алгебрѣ, различать двоякаго рода: а) задачи, въ коихъ только одна неизвѣстная величина, и б) задачи, въ которыхъ нѣсколько взаимно зависящихъ одна отъ другой, неизвѣстныхъ величинъ.—Задачи съ одною неизвѣстною величиною полезно различать въ свою очередь также двоякаго рода: а) задачи, въ которыхъ рядъ дѣйствій надъ неизвѣстною величиною даетъ, по условію, въ результатѣ извѣстное число, и б) задачи, въ которыхъ одно или нѣсколько дѣйствій даютъ, по условію, опять-таки неизвѣстную величину. Послѣднія задачи, большею частью, принадлежатъ къ числу замысловатыхъ.

*) Насколько точно раздѣленіе задачъ на два класса (чисто-ариѳметическихъ и алгебраическаго характера)—здѣсь разбирать было бы неумѣстно. Достаточно замѣтить, что оно вполнѣ точно и что вопросъ этотъ разрѣшенъ въ статьѣ составителя, помѣщенной въ № 2 „Русской Школы" за 1900 годъ, подъ заглавіемъ: „Объ ариѳметическихъ задачахъ алгебраическаго характера".

Такимъ образомъ мы пришли къ слѣдующему распредѣленію всѣхъ задачъ, обыкновенно предлагаемыхъ въ ариѳметическихъ задачникахъ, на классы:

- Задачи
  - чисто-ариѳметическія
    - простыя
      - 1-го рода
      - и
      - 2-го рода
    - и
    - сложныя
      - приведенныя
      - и
      - неприведенныя
  - и
  - алгебраическаго характера
    - съ одною неизвѣстною
    - и
    - со многими неизвѣстными.

Великое значеніе простыхъ задачъ.

§ 11. Чтобы понять все значеніе задачъ простыхъ въ дѣлѣ обученія ариѳметикѣ, должно принять къ свѣдѣнію слѣдующія соображенія. Прежде чѣмъ учить дѣтей производству ариѳметическихъ дѣйствій, должно уяснить самую необходимость дѣйствій и ихъ право на существованіе, ихъ цѣль и внутренній смыслъ. Встарину учащемуся задавали примѣръ на то или иное дѣйствіе и при этомъ требовали, чтобы онъ твердо зналъ правило наизусть и вѣрно совершилъ заданное дѣйствіе. Понимаетъ ли онъ самую цѣль дѣйствія, его смыслъ, сущность дѣйствія и право этого послѣдняго на вниманіе, этимъ не интересовались. Мало интересовались и тѣмъ, понимаютъ ли ученики особенности производства того или иного дѣйствія и размѣры того благодѣянія, которое ариѳметика оказываетъ человѣку, желающему что-либо разсчитать. Несущественно измѣнилась постановка ариѳметики и тогда, когда было понято, что однимъ выучиваніемъ правилъ ариѳметики наизусть

при обученіи ариѳметикѣ удовлетворяться не слѣдуетъ. Встарину дѣти преимущественно выучивали правила наизусть, а впослѣдствіи наступило увлеченіе другой крайностью, а именно увлеченіе рѣшеніемъ возможно большаго количества задачъ и тѣмъ взглядомъ, что оказать на дѣтей полезное развивательное вліяніе можно только съ помощью разрѣшенія ими многочисленныхъ замысловатыхъ задачъ преимущественно алгебраическаго характера. Замысловатыми, по самому существу своему, задачами переполнялись даже такіе задачники, въ основу которыхъ положено было такъ называемое изученіе чиселъ первой сотни, явившееся посильною поправкою къ господствовавшему у насъ еще менѣе полустолѣтія тому назадъ безсмысленному выучиванію учениками текста учебниковъ наизусть. Значеніе же простыхъ задачъ и нетрудныхъ сложныхъ изъ числа чисто-ариѳметическихъ, какъ средства къ обученію ариѳметикѣ, встарину почти не было извѣстно и, впрочемъ, еще доселѣ не достаточно оцѣнено.

Простыя задачи перваго рода должны предшествовать всяческимъ опредѣленіямъ и правиламъ и, на первыхъ же ступеняхъ обученія, должны и могутъ съ большою пользою для дѣла: а) привести учениковъ къ мысли о необходимости даннаго дѣйствія, б) уяснить имъ самую цѣль, самый смыслъ того или другого дѣйствія, и в) привести ихъ къ сознанію, что необходимо изобрѣсти пріемъ болѣе простой, чѣмъ тотъ, который ученикамъ въ данную минуту извѣстенъ.—Простыя задачи второго рода наиболѣе пригодны для того, чтобы съ ихъ помощью: а) уяснить различные въ логическомъ отношеніи случаи примѣненія одного и того же дѣйствія, и б) сдѣлать совершенно понятными различные въ словесномъ отношеніи способы выраженія требованій, приводящихъ къ однимъ и тѣмъ же дѣйствіямъ.

Какъ, въ самомъ дѣлѣ, убѣдить ребенка въ томъ, что необходимо создать, придумать такое-то ариѳметическое дѣйствіе, строго, точно и безошибочно различая его отъ другихъ? Какъ уяснить ему цѣль и смыслъ даннаго дѣйствія, случаи его примѣненія и различныя словесныя выраженія требованія, чтобы это дѣйствіе было совершено? Какъ убѣдить его въ томъ, что однимъ счетомъ нельзя обойтись и что необходимо умѣть складывать, что однимъ сложеніемъ трудно обойтись, а надо придумать умноженіе, что однимъ вычитаніемъ невозможно обойтись, когда требуется узнать, сколько разъ одно, небольшое, число содержится въ другомъ, большомъ? Никакія увѣренія учителя, никакое изложеніе (въ видѣ лекціи), никакія опредѣленія не могутъ, конечно, убѣдить ученика въ томъ, что чуждо его представленію. Опредѣленія дѣти точно такъ же, какъ и взрослые, понимаютъ только тогда, когда всѣ понятія, входящія въ составъ опредѣленія, имъ хорошо извѣстны, когда имъ извѣстны цѣль опредѣленія и всѣ соприкасающіяся съ даннымъ опредѣленіемъ понятія и представленія. А это-то именно и отсутствуетъ въ умѣ малолѣтняго. Всякая попытка къ изложенію и объясненію тѣхъ случаевъ, которые требуютъ того или иного дѣйствія, разбивается на практикѣ въ прахъ, благодаря неумѣнію малолѣтнихъ учениковъ сосредоточивать на-долго свое вниманіе и ихъ неспособности понять умомъ то, что не прошло чрезъ ихъ сознаніе въ видѣ цѣлаго ряда однородныхъ представленій. Правило,—навязанное ученикамъ какъ бы насильно, несмотря на отсутствіе у дѣтей потребности въ этомъ правилѣ,—конечно, тоже малополезно.

§ 12. Результатомъ этихъ размышленій является слѣдующее основное положеніе: для развитія у учащихся правильныхъ представленій, а впослѣдствіи — и понятій о четырехъ дѣйствіяхъ, соотвѣтствующія части курса начальной ариѳметики должно построить на задачахъ и притомъ на задачахъ простыхъ. Это соприкасается съ вопросомъ о томъ, какъ назвать ту методу, которая разрабатывается въ настоящемъ сочиненіи. Ариѳметическія задачи вообще должны, при разумномъ обученіи, быть не цѣлью, а только средствомъ обученія ариѳметикѣ; съ ихъ помощью должно вырабатывать и развивать вѣрныя и ясныя представленія и понятія: о четырехъ дѣйствіяхъ, объ ихъ смыслѣ и цѣли, и т. п. Поэтому изъ десяти случаевъ въ девяти задача должна быть исходною точкою преподаванія ариѳметики. Вотъ что говоритъ извѣстный французскій педагогъ Жанъ Масе объ этомъ предметѣ: „Развитіе человѣчества повторяется въ каждомъ малолѣтнемъ... Первый, кому пришлось сдѣлать вычисленіе, началъ не съ отвлеченныхъ правилъ, излагаемыхъ въ учебникахъ. Онъ, очевидно, прежде всего долженъ былъ не потеряться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ и задачъ, надъ которыми онъ могъ одержать побѣду, только пустивъ въ дѣло всѣ средства своего ума, и онъ занимался этимъ искусствомъ вовсе не ради самаго искусства. Заставлять ребенка начинать съ отвлеченнаго правила и затѣмъ предлагать ему задачи—это значитъ итти наперекоръ ходу развитія человѣческаго ума...

Метода цѣлесообразныхъ задачъ.

Истинная метода состоитъ въ томъ, чтобы ставить ребенка въ условія, при которыхъ умъ человѣческій началъ изобрѣтать ариѳметику, и сдѣлать его, такъ сказать, свидѣтелемъ этого изобрѣтенія". Такова метода цѣлесообразныхъ задачъ, точки зрѣнія которой учитель долженъ прежде всего себѣ усвоить, прибѣгая къ задачамъ чаще для выработки ариѳметическихъ представленій и понятій, чѣмъ для ихъ примѣненія къ тѣмъ случаямъ, когда именно эти представленія почти непримѣнимы, какъ, напр., при рѣшеніи запутанныхъ задачъ алгебраическаго характера. (Въ духѣ этой методы составлены и настоящее руководство по предмету методики ариѳметики, и прикоровленные къ нему „Ариѳметическій задачникъ для учителей" и „Ариѳметическій задачникъ для учениковъ",—оба выпуска каждой книги). Метода эта названа „методою задачъ" — потому, что задачи, въ обширномъ смыслѣ этого слова, являются исходною точкою во всякій моментъ обученія. Метода эта названа методою цѣлесообразныхъ задачъ потому, что для каждой ступени, для каждаго ученія, для преодолѣнія каждой трудности, надо предлагать ученикамъ не какія ни попало задачи даннаго отдѣла и не задачи ради самаго разрѣшенія ихъ, а задачи, сообразованныя съ исключительною цѣлью предстоящаго урока ариѳметики.

Сложныя ариѳметическія задачи.

§ 13. Что же касается болѣе или менѣе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, то ихъ значеніе для надлежащаго преподаванія ариѳметикѣ лишь постолько важно, посколько онѣ служатъ той же цѣли развитія у учащихся правильныхъ представленій и точныхъ понятій о четырехъ дѣйствіяхъ. Для ежедневной жизни важно рѣшеніе лишь весьма немногочисленныхъ видовъ задачъ (рѣдко на простое тройное правило, на вычисленіе процентныхъ денегъ, и т. п.). Образовательное (развивательное) значеніе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ сводится къ тому, что для ихъ рѣшенія требуется чаще всего большее развитіе вниманія и болѣе значительная мѣра пониманія родной рѣчи. Но, говоря о развивательномъ значеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, мы имѣемъ въ виду не умственное развитіе вообще, но развитіе необходимаго навыка къ употребленію, а главное—къ пониманію ариѳметической рѣчи, рядомъ съ развитіемъ большаго вниманія къ вопросамъ ариѳметическаго содержанія. Не надо только преувеличивать общеразвивательное значеніе рѣшенія многочисленныхъ сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ. Наибольшее значеніе въ дѣлѣ развитія

полезныхъ умственныхъ навыковъ должно быть придаваемо не рѣшенію особенно-сложныхъ ариѳметическихъ задачъ, а самому курсу ариѳметики и тому учебному и логически-стройному матеріалу, который составляетъ его содержаніе. Задачи же при этомъ являются только наиболѣе цѣлесообразнымъ къ тому средствомъ.

Сравненіе строчекъ сложныхъ чисто-ариѳм. задачъ со строчками алгебраич. задачъ.

§ 14. При разрѣшеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ представляется простѣйшій случай къ уясненію способа разложенія задачи со многими условіями на составляющія ее простыя. Какъ бы многочисленны ни были условія такой задачи, разборъ (анализъ) задачи этого рода не требуетъ особенной сноровки въ уразумѣніи ея составныхъ элементовъ. При этомъ замѣчательно, что тѣ простыя задачи, къ разрѣшенію коихъ приводится задача сложная изъ класса чисто-ариѳметическихъ, всегда могутъ быть легко, вкратцѣ и точно выражены, чего далеко нельзя сказать о задачахъ алгебраическихъ. При рѣшеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ принято каждое дѣйствіе записывать въ видѣ отдѣльной строчки. Если распредѣлить рѣшеніе чисто-ариѳметическихъ задачъ въ видѣ т. наз. строчекъ, то каждая изъ нихъ отвѣчаетъ на какой-нибудь частный вопросъ, не представляющій никакихъ особенныхъ затрудненій при установленіи его содержанія и смысла.

Приведенная выше сложная ариѳметическая задача, напр., располагается въ видѣ слѣдующихъ семи строчекъ:

1)	3 р. × 7 = 21 р.	Эти строчки по порядку выражаютъ: 1) сколько заплачено за сукно, 2) сколько за бархатъ, 3) сколько за то и другое, 4) сколько лицо, о которомъ рѣчь, могло бы еще истратить на сукно, 5) сколько на бархатъ, 6) сколько оно могло всего истратить, кромѣ того, что имъ уже истрачено, и 7) сколько всего у этого лица было денегъ.
2)	7 р. × 5 = 35 „	
3)	21 р. + 35 р. = 56 „	
4)	4 р. × 2 = 8 „	
5)	6 р. × 3 = 18 „	
6)	8 р. + 18 р. = 26 „	
7)	56 р + 26 р. = 82 „	

Далеко не въ такой же степени просты вопросы алгебраическихъ задачъ. Приведенная выше алгебраическая задача сводится, напр., всего къ тремъ строчкамъ:

1)	28 р. + 92 р. = 120 р.	
2)	10 к. — 8 к. = 2 к.	
3)	120 р. : 2 к. = 6000.	

Но за-то каждая изъ нихъ выражаетъ нѣсколько весьма отвлеченныхъ мыслей, не поддающихся столь краткому и ясному выраженію, какое допускаютъ выше разсмотрѣнныя семь строчекъ чисто-ариѳметической задачи. Дѣйствительно: первая строчка занимающей насъ алгебраической задачи отвѣчаетъ на слѣдующій весьма тонкій, глубоко въ условія задачи запрятанный, вопросъ: если торговецъ станетъ продавать ситецъ по десяти коп. за аршинъ, то на сколько онъ боль-

ше выручитъ денегъ противъ того количества ихъ, которое онъ выручилъ бы, продавая ситецъ по восьми копеекъ? Вторая строчка, включая въ себѣ опять-таки тонкую и глубоко запрятанную въ условія задачи мысль о причинѣ такой разницы въ выручкѣ, отвѣчаетъ въ то же время на сравнительно простой, но по цѣли опять-таки глубокій, вопросъ: сколько торговецъ получитъ лишку на каждомъ аршинѣ ситцу, продавая его по 10-ти коп., противъ того, сколько онъ получалъ бы за аршинъ, продавая его по 8-ми коп.? Третья строчка отвѣчаетъ опять-таки на простой, но тѣмъ не менѣе требующій также весьма значительной степени вдумчивости, вопросъ: сколько у торговца осталось ситца?—Очевидно, что самый характеръ и форма вопросовъ только-что разсмотрѣнной задачи совсѣмъ иные. Въ то время какъ къ сложной чисто-ариѳметической задачѣ между строчками (если можно такъ выразиться) лежатъ мысли очень понятныя и доступныя при одномъ взглядѣ на строчку, между строчками задачи алгебраической лежатъ мысли болѣе или менѣе скрытыя и для большинства дѣтей мало доступныя. Такъ, между строчками первою и второю нашей алгебраической задачи лежитъ, какъ выше замѣчено, мысль о причинѣ избытка, и между второй и третьею—мысль о томъ, что полученный избытокъ зависитъ исключительно отъ разности между цѣною аршина въ другомъ случаѣ. Болѣе того: самая постановка первой строчки уже предполагаетъ такой навыкъ въ тонкомъ разборѣ и расчлененіи, въ такъ наз. анализѣ, задачи и такой рядъ разсужденій, къ какимъ никогда не приходится прибѣгать при разрѣшеніи задачи хотя бы и очень сложной, изъ числа чисто-ариѳметическихъ.

Истинное значеніе алгебраическихъ задачъ.

§ 15. Послѣ всего вышеизложеннаго легко разобраться въ вопросѣ объ истинномъ значеніи алгебраическихъ задачъ въ курсѣ ариѳметики, подлежащемъ усвоенію учениками начальной одноклассной школы, и во всякомъ иномъ, болѣе повышенномъ, курсѣ того же предмета. Задачи простыя, т. е.—требующія только одного дѣйствія, важны какъ основной сырой матеріалъ, на почвѣ котораго созидаются въ умѣ учениковъ вѣрныя ариѳметическія представленія и подготовляется возможность построенія въ умѣ учениковъ также точныхъ ариѳметическихъ понятій. На этомъ же матеріалѣ зиждутся основныя ариѳметическія умѣнія, которыя ученикъ долженъ пріобрѣсти въ области дѣйствій надъ числами первой сотни, а также возможность возникновенія мыслей о необходимости письменнаго производства дѣйствій надъ числами, выходящими болѣе или менѣе далеко за предѣлы первой сотни, и объ измѣненіи результатовъ дѣйствій въ зависимости отъ чиселъ данныхъ. Задачи болѣе или менѣе сложныя изъ числа чисто-ариѳметическихъ могутъ, укрѣпляя вниманіе учащихся, развивая ихъ мысль, способность къ пониманію рѣчи и умѣніе разбираться въ условіяхъ чисто-ариѳметическихъ вопросовъ, въ то же время могутъ имѣть нѣкоторое значеніе для обученія ариѳметикѣ какъ таковой, служа къ лучшему уясненію цѣли ариѳметическихъ дѣйствій и ихъ взаимныхъ отношеній. Задачи же алгебраическія, въ особенности изъ числа сколько-нибудь замысловатыхъ, вообще не въ состояніи оказать при обученіи тѣхъ-же услугъ. Ибо, при неспособности большинства дѣтей къ математическимъ пріемамъ мышленія и при недостаточномъ развитіи у дѣтей стремленій къ чисто-алгебраическому анализу, вниманіе дѣтей на алгебраическихъ задачахъ изощряется очень мало. Столь же мало изощряется также и мысль ихъ. Наконецъ, для обученія ариѳметикѣ какъ таковой, эти задачи тоже мало полезны, нисколько не содѣйствуя ни уясненію дѣйствій и ихъ соотношеній, ни выработкѣ чисто-ариѳметическихъ навыковъ, понятій и представленій.

Что необходимо для разрѣшенія алгебр. задачи?

Понявъ даже всѣ слова, заключающіяся въ данной алгебраической задачѣ, понявъ даже и условія ея, дѣти далеко еще не подготовлены къ анализу этихъ условій если они не достаточно упражнялись въ этомъ одностороннемъ, особенномъ направленіи. Дѣло въ томъ, что одно пониманіе и знаніе четырехъ дѣйствій, будучи необходимымъ условіемъ рѣшенія алгебраической задачи, далеко еще недостаточны для того, чтобы задача была вѣрно и логично разрѣшена. Какъ, въ самомъ дѣлѣ, разрѣшить алгебраическую задачу, если къ ней приступить только съ знаніемъ четырехъ дѣйствій и безъ болѣе или менѣе тонкаго разбора, анализа, который въ задачахъ простыхъ и даже сложныхъ, изъ числа чисто-ариѳметическихъ, отличается чрезвычайною краткостью и непосредственностью? Для рѣшенія алгебраической задачи, кромѣ знанія дѣйствій, необходимъ еще особенный, чаще всего весьма значительный, навыкъ въ изслѣдованіи вопроса, въ расчлененіи его, въ анализѣ, требующемъ не только часто непосильнаго дѣтскому разумѣнію труда, но даже особенной изобрѣтательности и сторонникъ, повидимому, не данныхъ въ условіяхъ задачи, соображеній.

Отношеніе задачъ алгебраическаго характера къ ариѳметикѣ.

Не вдаваясь пока въ дальнѣйшее обсужденіе вопроса о роли задачъ алгебраическаго характера, мы тѣмъ не менѣе изъ предыдущаго можемъ сдѣлать тотъ выводъ, что: 1) ученія ариѳметики не оказываютъ особенныхъ услугъ при разрѣшеніи задачъ этого рода: они только необходимы для возможности рѣшенія, но для того не достаточны, и 2) обученію ариѳметикѣ, какъ таковой, задачи алгебраическія (въ особенности изъ числа замысловатыхъ) въ свою очередь, тоже не оказываютъ никакихъ услугъ, такъ какъ не относятся ни къ сущности, ни къ производству ариѳметическихъ дѣйствій. Каково же въ такомъ случаѣ истинное значеніе этого рода задачъ въ школѣ? Ознакомленіе дѣтей съ аналитическою формою мышленія, конечно, полезно въ развивательномъ отношеніи, если дѣти къ этому подготовлены и если данная школа имѣетъ въ распоряженіи своемъ достаточное для того количество времени. Но увлеченіе задачами алгебраическими, притомъ, конечно, въ ущербъ самому курсу ариѳметики, не заслуживаетъ никакого сочувствія, если на дѣло смотрѣть съ точки зрѣнія требованій только начальной школы. Это тѣмъ справедливѣе, что въ самомъ прохожденіи надлежащаго курса ариѳметики заключается гораздо болѣе истинно-развивательнаго матеріала, чѣмъ это кажется съ перваго

взгляда. Обученіе вообще оказываетъ на дѣтскій умъ въ высшей степени важное и полезное воспитательное вліяніе. Оно внушаетъ дѣтямъ должное уваженіе къ уму человѣческому и прививаетъ дѣтскому разумѣнію такъ много необходимыхъ привычекъ, что въ сравненіи съ послѣдними навыкъ въ рѣшеніи алгебраическихъ задачъ, по причинѣ крайней односторонности, является навыкомъ, которому можно приписывать только второстепенное значеніе. Лучшимъ доказательствомъ справедливости этого взгляда можетъ служить то, что можно указать много людей, имѣющихъ полнѣйшее право считаться людьми даже истинно-образованными, но не могущихъ похвастать ни малѣйшимъ умѣніемъ разрѣшать задачи алгебраическаго характера. Къ тому же и практическая жизнь рѣдко представляетъ намъ такія задачи: большинство задачъ, представляющихся въ практической жизни, принадлежитъ къ числу чисто-ариѳметическихъ. Итакъ, алгебраическимъ задачамъ обыкновенно придается слишкомъ большое значеніе. А потому начальный учитель скорѣе можетъ повредить дѣлу, чѣмъ быть ему полезнымъ, если не отведетъ замысловатымъ задачамъ алгебраическаго характера второстепеннаго или даже третьестепеннаго, послѣдняго, мѣста. Въ особенности это справедливо, когда мы имѣемъ въ виду истинныя условія обученія въ нашей одноклассной начальной школѣ и истинныя, а не призрачныя, потребности ея.—Въ школахъ съ повышеннымъ курсомъ ариѳметики имъ можетъ быть отведено (хотя прямой необходимости въ томъ и нѣтъ) болѣе значительное мѣсто, въ связи съ нѣкоторыми свѣдѣніями изъ алгебры или, въ крайнемъ случаѣ, независимо отъ послѣдней.

Задача о пастухахъ.

Часто ученики даже высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, несмотря на довольно основательное знаніе средне-образовательнаго курса математики, не въ состояніи безъ помощи одного или двухъ уравненій, т. е. безъ алгебры, разрѣшить извѣстную задачу, гласящую такъ: Одинъ пастухъ сказалъ другому: „отдай мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у меня будетъ вдвое болѣе, чѣмъ у тебя“.—Нѣтъ, отвѣчалъ ему другой: отдай лучше ты мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у насъ будетъ поровну. Сколько у каждаго изъ нихъ овецъ?—Трудность этой задачи не только для дѣтей, но и для взрослыхъ, заключается въ томъ, что по порядку надо изслѣдовать слѣдующіе семь вопросовъ: 1) у котораго изъ пастуховъ больше? 2) если бы первый пастухъ одну овцу отдалъ третьему лицу, то у котораго изъ пастуховъ и на сколько было бы больше, чѣмъ у другого? (у перваго одною овцою больше), 3) если бы онъ не отдавалъ никому ни одной овцы, то на сколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на двѣ), 4) если бы второй пастухъ отдалъ третьему лицу одну овцу, то на сколько у перваго было бы въ этомъ случаѣ больше овецъ, чѣмъ у второго? (на три овцы), 5) если бы онъ отдалъ одну овцу второму пастуху, то на сколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на четыре). 6) Но по условію у него въ этомъ случаѣ было бы вдвое болѣе, чѣмъ у второго, стало-быть, сколько у второго въ этомъ случаѣ овецъ? (четыре). 7) Сколько у него было ранѣе? (пять). 8) А сколько у перваго? (семь).—Эти вопросы приведены для того, чтобы показать, какая длинная цѣпь ихъ необходима, чтобы привести къ рѣшенію задачи,

повидимому, вовсе не особенно запутанной—ни въ числовомъ, ни въ словесномъ отношеніи. Разсмотрѣніе того, къ какимъ «строчкамъ» ведетъ эта задача, будетъ читателю весьма полезно для лучшаго уясненія себѣ содержанія предыдущихъ параграфовъ. Строчекъ этихъ всего пять. Первая изъ этихъ строчекъ отвѣчаетъ на вопросъ: если первый пастухъ отдастъ третьему лицу одну изъ своихъ овецъ, а потомъ возьметъ ее себѣ обратно, то на сколько у него будетъ овецъ болѣе, чѣмъ у второго пастуха? Вторая строка выражаетъ, на сколько овецъ у перваго пастуха станетъ больше, чѣмъ у второго, если второй отдастъ третьему лицу одну изъ своихъ овецъ? Третья выражаетъ, на сколько у перваго пастуха станетъ больше, чѣмъ у второго, если второй отдастъ эту овцу не третьему лицу, а первому пастуху? Четвертая строчка выражаетъ, сколько овецъ у второго пастуха, а пятая—сколько овецъ у перваго пастуха.—Но между строками третью и четвертою скрыто разсужденіе о томъ, что если у перваго пастуха на 4 овцы болѣе, чѣмъ у второго, и если въ то же время у него (по условію задачи) вдвое болѣе, чѣмъ у второго, то у второго въ такомъ случаѣ непремѣнно четыре овцы,—мысль, представляющая не только для учениковъ неимовѣрныя трудности, но и отъ учителя требующая большого количества труда и подготовительной работы. Между остальными строчками также не мало мыслей, скрытыхъ для глаза непосвященныхъ.

1) $1+1=2$
2) $2+1=3$
3) $3+1=4$
4) $4+1=5$
5) $5+2=7$

Ариѳметическіе примѣры.

§ 16. Среди чисто-ариѳметическихъ упражненій отдѣльное мѣсто занимаютъ такъ называемые примѣры, т. е. вычисленіе ариѳметическихъ выраженій, въ которыхъ съ помощью знаковъ выражены требованія относительно производства одного или нѣсколькихъ ариѳметическихъ дѣйствій. Значеніе примѣровъ чаще и прежде всего чисто-практическое. Упражняясь въ вычисленіи примѣровъ, дѣти пріобрѣтаютъ навыкъ въ аккуратномъ, ничѣмъ не усложняемомъ, письменномъ или изустномъ, производствѣ дѣйствій. На примѣрахъ дѣти научаются располагать письменныя вычисленія сообразно тѣмъ образцамъ, которые имъ даны учителемъ, и вообще—быстро вычислять (что можно—изустно, а чего нельзя изустно, то—письменно). Понятно, что въ вычисленіи примѣровъ дѣти должны упражняться по возможности старательно и неустанно, и притомъ безъ непосредственной помощи учителя. Только тотъ научается вѣрному и быстрому вычисленію, кто самъ много упражнялся въ этомъ дѣлѣ, притомъ упражнялся настойчиво и сознательно. Въ практикѣ веденія занятій въ начальной одноклассной школѣ ариѳметическіе примѣры для вычисленія оказываютъ величайшую услугу, представляя собою наилучшій матеріалъ для самостоятельныхъ, втихомолку, занятій двухъ отдѣленій ариѳметикою, когда остальные ученики работаютъ

при участіи учителя и притомъ вслухъ. Понятно, что и примѣры должны быть расположены строго-сообразно съ требованіями цѣлесообразности и что, согласно „методѣ цѣлесообразныхъ задачъ", къ ариѳметическимъ примѣрамъ могутъ быть предъявлямы всѣ требованія, предъявляемыя къ обученію основными началами разумнаго обученія, приведенными въ § 4 главы I.

Форма обученія. § 17. Средствами для прямого воздѣйствія учителя на учениковъ при обученіи ариѳметикѣ служатъ: а) живое слово учителя, и б) работа учениковъ подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя. Эти средства неразрывно связаны съ формою обученія, т. е. съ тѣмъ, въ какомъ видѣ со стороны представляется воздѣйствіе учителя на учениковъ. — Встарину иными учителями практиковалось такое обученіе, при которомъ учитель только задавалъ уроки по учебнику, и на слѣдующемъ урокѣ провѣрялъ — на сколько хорошо ученикъ усвоилъ себѣ текстъ учебника на-память. Учитель былъ только экзаменаторомъ и ревизоромъ. Нынѣ эта форма обученія признается самою нецѣлесообразною, вслѣдствіе чего она почти совершенно оставлена. Поэтому различаютъ только двѣ формы обученія: а) излагательную (лекціонную, монологическую, акроаматическую), и б) вопросо-отвѣтную (катехизическую, эратематическую). — Держась излагательной формы обученія, учитель можетъ только читать лекціи, заставлять учениковъ повторять за нимъ только-что имъ сказанное, диктовать ученикамъ то, что они, по его мнѣнію, должны усвоить, показывать, какъ что дѣлается и требовать отъ учениковъ подраженія, и т. п. Во всякомъ случаѣ, при излагательной формѣ обученія, предполагается, что ученикъ внимателенъ и понятливъ, что онъ интересуется предметомъ преподаванія, требуется же отъ него, чтобы онъ прежде всего воспринялъ предлагаемое имъ учителемъ, а потомъ уже это усвоилъ себѣ и восполнилъ самостоятельнымъ трудомъ. — Держась вопросо-отвѣтной формы обученія, учитель можетъ предлагать вопросы для опредѣленія того, знаетъ ли ученикъ то, что онъ, по мнѣнію учителя, долженъ знать изъ прежнихъ уроковъ (экзаменаціонная форма), можетъ предлагать вопросы для того, чтобы поупражнять учениковъ въ усвоенномъ ими ранѣе (репетиціонная форма), можетъ предлагать вопросы для того, чтобы, путемъ вопросовъ, возбудить въ сознаніи учениковъ, на почвѣ того, что уже есть въ этомъ сознаніи, новыя представленія, новыя понятія, познанія и умѣнія (изобрѣтающая, эвристическая форма), и т. п. При этомъ не только учитель можетъ спрашивать ученика, но и

ученикъ — учителя, и учитель съ классомъ представляютъ одно цѣлое, какъ бы стремящееся, хотя и подъ руководствомъ учителя, къ одной и той же цѣли. — Вопросо-отвѣтная форма признается нынѣ самою нѣлесообразною формой обученія малолѣтнихъ, такъ какъ она допускаетъ наилучшее примѣненіе основныхъ началъ всякаго разумнаго обученія. Въ школѣ эта форма обученія особенно необходима, такъ какъ только она допускаетъ дѣйствительное участіе всего класса. Держась ея, учитель не предполагаетъ вниманія класса, а старается это вниманіе возбудить и поддержать. Онъ не предполагаетъ и особенной понятливости и интереса со стороны учениковъ, каковую понятливость онъ старается развить, а интересъ создать вопросами. При этомъ самостоятельная работа учениковъ надъ новымъ матеріаломъ совершается чаще всего тутъ же, въ классѣ, а не отлагается на внѣ-урочное время. — Но, къ сожалѣнію, увлеченіе катехизической формою обученія доходитъ иногда до крайностей: все искусство учителя многіе сводятъ къ умѣнію предлагать вопросы, упраздняя методику обученія и замѣняя ее одной вопросо-отвѣтной формой обученія, которая безъ методическихъ цѣлей является, конечно, формою безъ содержанія. Учителю не надо всегда катехизировать: увлеченіе исключительно этою формою ведетъ за собою и крайнюю искусственность уроковъ, и чрезмѣрную, притомъ часто невознаградимую, потерю времени. — Въ ариѳметикѣ есть не только частности, но даже цѣлыя статьи, при усвоеніи которыхъ катехизація можетъ быть только повторительною. Такова, напр., статья о нумераціи вмѣстѣ съ ученіемъ объ употребленіи цифръ. Никакіе вопросы, какъ бы разумно они поставлены ни были, не могутъ довести учащагося ни до начертанія цифръ, ни до нумераціи, ни до обозначенія обыкновенныхъ или десятичныхъ дробей, ни до способа нахожденія наименьшаго кратнаго числа, и т. д. Такъ же мало катехизація примѣнима къ выработкѣ способовъ расположенія письменныхъ вычисленій и вообще къ выработкѣ условныхъ пріемовъ ариѳметическаго вычисленія, къ усвоенію дѣтьми такихъ фактовъ, что миля содержитъ приблизительно 7 верстъ, что сажень равна 7 футамъ, а стопа — 20-ти дестямъ, что частное иногда называется отношеніемъ, что сотни, десятки и единицы составляютъ классъ единицъ, и т. п. У нѣкоторыхъ педагоговъ катехизаціи придается слишкомъ большое значеніе. Масса вопросовъ, предлагаемыхъ какъ бы съ цѣлью наведенія, на самомъ дѣлѣ иногда только загромождаютъ урокъ безполезными подробно-

стями и отнимаетъ у школы драгоцѣнное время. Но это все-таки не мѣшаетъ вопросо-отвѣтной формѣ быть наилучшею формою обученія.

Необходимость чередованія формъ обученія.

Ранѣе, чѣмъ поступать къ катехизаціи, учитель долженъ, пользуясь своимъ естественнымъ чутьемъ и не обращая вниманія ни на какія педагогическія правила, уяснить самому себѣ естественнѣйшій, самый прямой путь уясненія учащемуся интересующаго его въ данную минуту ученія. Учащій не долженъ думать, что окольные пути мышленія дѣтямъ доступнѣе прямого. Онъ долженъ всегда избѣгать сколько-нибудь продолжительнаго (долѣе полуминуты) изложенія (лекціонной формы); всегда надо учениковъ привлекать къ работѣ, какъ по прямому пути, такъ и по путямъ косвеннымъ. Отступленія отъ прямого пути дозволительны только тогда, когда они служатъ цѣлямъ развитія въ дѣтяхъ рѣчи. Но и въ этомъ случаѣ на отступленіе отъ прямого пути должно смотрѣть именно какъ на отступленіе, не возводя его въ правило и стараясь достигнуть развитія рѣчи иными способами, не увлекаясь разговоромъ, развивающимъ рѣчь учителя и убивающимъ самодѣятельность дѣтей. Обученіе, пока оно живо и разумно, не допускаетъ рабскаго примѣненія только одной формы обученія. Формы обученія, поэтому, должны чередоваться, и слѣдованіе только одной изъ нихъ вредно отзывается какъ на самомъ содержаніи урока, такъ и на образовательномъ его значеніи. За вопросами учителя должны слѣдовать отвѣты класса, поправки учениковъ и учителя, повтореніе поправленнаго учениками, указанія учителя, новыя повторенія, новые вопросы, и т. д., и т. д.

Воздѣйствіе на воображеніе.

Въ связи съ формою обученія находится и вопросъ о томъ,—надо ли при обученіи ариѳметикѣ только развивать способность сужденія и вкусъ къ правильному умозаключенію, или же также прибѣгать къ помощи и къ работѣ воображенія, фантазіи, живого представленія учениковъ? Надо помнить, что безъ участія и работы воображенія учениковъ разумное обученіе невозможно, и поэтому учащіеся должны во всѣхъ вопросахъ ариѳметическаго содержанія возможно чаще пользоваться этою драгоцѣнною способностью своею.

Живое слово учителя.

§ 18. Главнѣйшимъ средствомъ обученія является, конечно, живое слово учителя. Встарину ему придаавалось очень небольшое значеніе, и тогда почти весь трудъ по усвоенію учениками какого-либо знанія возлагался на этихъ послѣднихъ. Учитель задавалъ по книгѣ „урокъ“ и только провѣрялъ, на сколько хорошо этотъ урокъ выученъ на-память, вѣрно ли рѣшена задача, и т. п. Впослѣдствіи учителя стали преувеличивать значеніе своихъ „лекцій“, т. е. того, что они сами связно излагали въ классѣ, и стали требовать, чтобы ученики, не пользуясь учебными книгами, то же самое на слѣдующемъ урокѣ излагали „своими словами“. Но лишь недавно стали живому слову учителя придавать то значеніе, какое ему придавать на самомъ дѣлѣ можно: оно только должно поощрять, будить вниманіе учениковъ и направлять ихъ работу въ должную сторону. Лекціямъ же, т. е. непрерывному, въ теченіе болѣе или менѣе продолжительнаго промежутка времени, изложенію какого-либо ученія учителемъ, уже не придается не только для обученія малолѣтнихъ, но даже для преподаванія чего-либо и взрослымъ слушателямъ, того значенія, которое изложенію придавалось ранѣе. Въ то время какъ малолѣтняго, а иногда и взрослаго, продолжительное изложеніе учителя очень немногому научаетъ по причинѣ слишкомъ большой работы вниманія, требующейся отъ слушателя для усвоенія излагаемаго, даже для взрослаго слушателя возможно изъ лекціи усвоить себѣ только весьма поверхностное и не достовѣрное знаніе того, что онъ выслушалъ. Эти слабыя стороны излагательной формы преподаванія, однакоже, нисколько не умаляютъ силы живого слова учителя, если оно сказано во-время и надлежащимъ образомъ. А катехизическая форма обученія нимало не мѣшаетъ учителю пользоваться своимъ живымъ словомъ. Живое слово учителя только должно итти рука объ руку съ работою учениковъ, и разные пріемы каждой изъ двухъ главнѣйшихъ формъ обученія должны чередоваться. Только въ этомъ случаѣ цѣли обученія могутъ быть достигнуты.

Требованія обѣихъ формъ обученія.

§ 19. Изъ основныхъ требованій вопросо-отвѣтной формы обученія учитель всякаго предмета вообще, и ариѳметики въ частности, долженъ всегда помнить слѣдующія: а) вопросъ долженъ отличаться краткостью, ясностью, цѣлесообразностью, содержательностью и опредѣленностью; б) съ вопросами школьный учитель долженъ обращаться ко всему классу, и затѣмъ уже изъ желающихъ отвѣчать на вопросъ выбирать одного ученика, долженствующаго отвѣчать; в) при этомъ ученики, не пожелавшіе отвѣчать, отнюдь не должны быть забываемы учителемъ и оставляемы въ покоѣ, а напротивъ должны быть привлекаемы къ дружной и совмѣстной работѣ; и г) поучительнымъ для учениковъ долженъ быть сдѣланъ какъ правильный, такъ и отчасти лишь правильный, а равно и вовсе не-

правильный отвѣтъ; отсутствіе же всякаго отвѣта должно служить для учителя только поводомъ для самоисправленія, для самоизученія и для лучшаго изученія класса. — Изъ основныхъ требованій, которыя могутъ быть предъявляемы къ изложенію учителя, главнѣйшія сводятся: а) къ простотѣ и содержательности изложенія и б) къ краткости. Начальный учитель долженъ стремиться къ тому, чтобы его изложеніе длилось каждый разъ меньше одной минуты, и во всякомъ случаѣ меньше того количества времени, въ теченіе котораго малолѣтніе могутъ быть дѣятельно-внимательны.

Самостоятельныя работы учениковъ. § 20. Кромѣ живого слова учителя, средствами обученія ариѳметикѣ служатъ: а) самостоятельныя работы учениковъ въ классѣ, и б) задаваніе ученикамъ уроковъ на-домъ. Въ одноклассной начальной школѣ задаваніе уроковъ на-домъ можетъ, вслѣдствіе домашнихъ условій учениковъ, быть практикуемо лишь въ весьма незначительной степени, и то лишь съ учениками старшаго отдѣленія, которые уже хорошо ознакомились съ требованіями школы. Увлекаться задаваніемъ уроковъ на-домъ и учителю двукласснаго или др. низшаго, и даже учителю средняго учебнаго заведенія тоже не слѣдуетъ. — Гораздо больше значеніе самостоятельныхъ классныхъ работъ учениковъ. Онѣ являются большимъ подспорьемъ при обученіи ариѳметикѣ, если онѣ строго предопредѣлены и согласованы съ методою обученія. Отдѣленіе, которому предложена работа (напр., по „Задачнику для учениковъ“), должно прежде всего знать — какъ ему эту работу выполнить. Безъ этого ученики не только не научатся тому, чему ихъ эта работа должна научить, но и пріобрѣтутъ себѣ много вредныхъ привычекъ. Поэтому, прежде чѣмъ предоставить учениковъ самостоятельнымъ занятіямъ, учитель долженъ убѣдиться въ томъ — знаютъ ли ученики, чего отъ нихъ требуютъ, и научить ихъ должному выполненію заданной работы.

Порядокъ работы въ классѣ. § 21. Держась методы цѣлесообразныхъ задачъ и смѣшанной, однако же преимущественно катехизической, формы обученія, учитель долженъ соблюдать слѣдующій порядокъ усвоенія любого ученія ариѳметики: 1) сначала должно предложить цѣлесообразныя задачи на наглядномъ пособіи, наиболѣе подходящемъ для данной ступени, и работу для рукъ и глазъ учениковъ надъ этими задачами; 2) затѣмъ задачи въ обыденной жизни и работу воображенія учениковъ надъ этими задачами; 3) далѣе — отвлеченныя задачи (если въ нихъ

есть надобность) и работу для сужденія учениковъ надъ этими задачами; 4) потомъ логическій выводъ изъ всей работы (если таковой есть) со стороны учениковъ съ поправками учениковъ и учителя и выводъ учителя; наконецъ, 5) должно закрѣпить выводъ въ представленіи и разумѣніи учениковъ и предложить словесныя упражненія ученикамъ въ этомъ направленіи. — Только съ учениками старшихъ отдѣленій можно вообще опускать задачи на наглядныхъ пособіяхъ, если только въ помощи этихъ послѣднихъ нѣтъ прямой надобности.

Сборники задачъ и примѣровъ для учащихся. § 22. Іенике, извѣстный знатокъ методики ариѳметики, насчитываетъ среди тѣлесныхъ наглядныхъ пособій 22 отдѣльныхъ пособія, среди изобразительныхъ наглядныхъ пособій (напечатанныхъ и нарисованныхъ) восемь, а среди пособій, служащихъ для упражненія — четыре. Изъ числа послѣднихъ онъ особенно сочувствуетъ сборникамъ упражненій для учащихся, каковыхъ сборниковъ въ Германіи множество. Особенно горячимъ сторонникомъ этого учебнаго пособія былъ Дистервегъ. „Для одноклассной народной школы, говоритъ Іенике, въ которой должны быть заняты работою одновременно, по крайней мѣрѣ, четыре отдѣленія (рѣчь идетъ о нѣмецкихъ школахъ съ двумя учителями) сборникъ упражненій для учащихся, въ которомъ, по Дистервегу, не должно быть даваемо никакихъ правилъ, образцовыхъ вычисленій, и т. п., а должны быть предлагаемы только упражненія въ вычисленіяхъ и въ рѣшеніи задачъ, играетъ особенно важную роль. Въ то время какъ два отдѣленія занимаются по такому сборнику, другія подъ руководствомъ учителя и его помощника занимаются другимъ дѣломъ“ (стр. 147 его „Исторіи преподаванія ариѳметики“). Въ Пруссіи, согласно приказу министерства отъ 15 Октября 1872 года, „въ основаніе преподаванія ариѳметики должны быть во всѣхъ школахъ положены сборники для учащихся (Schülerhefte), причемъ въ рукахъ учителя должны быть отвѣты на задачи этихъ сборниковъ“. (Въ виду вполнѣ вѣрной мысли, лежащей въ основѣ этого взгляда, задачники, предназначенные составителемъ этой книги для низшихъ учебныхъ заведеній, распадаются на двѣ книги: одну — для учителей, другую — для учениковъ). Списокъ отвѣтовъ къ книгѣ, предназначенной для учениковъ, часто лишаетъ учителя возможности быстро провѣрять самостоятельныя работы учениковъ. А потому гораздо цѣлесообразнѣе, въ особен-

ности въ одноклассной начальной школѣ, оказывается отсутствіе въ книгѣ для учениковъ списка отвѣтовъ на задачи и упражненія. Онѣ требуютъ только отъ малолѣтнихъ значительнаго труда, а учителемъ разрѣшаются съ большою легкостью. Списокъ отвѣтовъ на задачи болѣе трудныя долженъ быть либо составленъ самимъ учителемъ, либо же приложенъ къ книгѣ для учителей.

Учебникъ ариѳметики. § 23. Изъ другихъ пособій при обученіи ариѳметикѣ заслуживаютъ вниманія учебники этого предмета. При этомъ надо помнить, что подъ учебникомъ надо разумѣть только ту учебную книгу, въ которой изложены ученія даннаго учебнаго предмета. Поэтому, отнюдь не должно смѣшивать задачниковъ съ учебниками и не должно называть (какъ это нынѣ иногда дѣлается для краткости) задачники—также учебниками. Учебнику встарину придавалось первостепенное значеніе, а усвоеніе текста учебниковъ учениками на-память считалось главнѣйшимъ средствомъ обученія. Съ конца пятидесятыхъ и начала шестидесятыхъ годовъ текущаго столѣтія укрѣпилось у насъ то направленіе педагогики, которое лишило учебникъ прежняго его значенія. Встарину предавались одной крайности, которая приводитъ къ очень грустнымъ послѣдствіямъ, только обременяя память учениковъ и почти не обращая вниманія на ихъ разумѣніе. Только впослѣдствіи стали обращать вниманіе на разумѣніе учениковъ и свое справедливое несочувствіе къ безсмысленному выучиванію учениками текста учебника наизусть распространили и на самые учебники, какъ на учебныя пособія, не признавая за ними ровно никакого значенія. Это — конечно, тоже крайность.—Въ настоящее время есть всѣ основанія для слѣдующихъ утвержденій: 1) въ первые два года обученія дѣтей начальной ариѳметикѣ въ одноклассной начальной школѣ (или въ соотвѣтствующихъ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній) учебнику ариѳметики нельзя отвести никакого мѣста въ обученіи, такъ какъ ученики еще не въ состояніи усваивать себѣ познанія по книгѣ и изъ книги; 2) учебникомъ надо ученика научить пользоваться уже послѣ того, какъ ученикомъ весь учебный матеріалъ усвоенъ съ полнымъ разумѣніемъ, при помощи учителя и благодаря классной, безъ учебника, работѣ надъ этимъ матеріаломъ; 3) въ третій или даже четвертый годъ, но никакъ не ранѣе конца второго года обученія въ одноклассной начальной школѣ, учениковъ можно уже пріучать и къ незнакомымъ частямъ текста учебника; 4) ихъ надо научить пользоваться этимъ текстомъ, причемъ слѣдуетъ добиться того, чтобы ученики его понимали, знали, если можно такъ выразиться, вдоль и поперекъ, что возможно только при вполнѣ сознательной, со стороны учителя и учениковъ, работѣ въ этомъ направленіи. — Цѣль употребленія учебника двоякая: практическая (то, что понято и усвоено съ помощью текста учебника, гораздо прочнѣе и полнѣе, сознательнѣе усвояется навсегда) и образовательная (благодаря учебнику, ученикъ пріучается къ усвоенію знаній, притомъ даже отвлеченныхъ, изъ книги). — Главнѣйшее условіе, при которомъ учебникъ приноситъ дѣйствительную пользу, сводится къ тому, чтобы ученики по учебнику сначала только приводили въ

порядокъ ранѣе уже усвоенныя ими умѣнія и познанія. Учебникъ долженъ эти умѣнія и познанія только укрѣпить, оформить и свести къ кратчайшему и точнѣйшему способу выраженія. Выучивать же что-либо изъ учебника наизусть ученики не должны ни въ какомъ случаѣ.

Учебникъ ариѳметики въ 3-й годъ. Въ третій годъ обученія въ нач. одноклассной школѣ курсъ ариѳметики, какъ извѣстно, долженъ въ себѣ содержать довольно много отвлеченнаго матеріала, напр., правила, опредѣленія, и т. п. Внесеніе большаго количества этого матеріала въ курсъ ариѳметики третьяго года обученія можетъ быть облегчено, главнымъ образомъ, благодаря учебнику. Чтеніе въ классѣ ясно и просто изложеннаго текста возможно краткаго учебника, притомъ чтеніе медленное, толковое и сопровождаемое цѣлесообразными разъясненіями учениковъ и учителя, въ состояніи внести очень много полезной сознательной работы въ занятія учащихся даннымъ предметомъ. Для этого, послѣ надлежащихъ предварительныхъ упражненій, можно заставлять учащихся поочередно читать текстъ учебника (отъ точки до точки) и связывать съ прочитаннымъ цѣлесообразныя разъясненія со стороны читающаго, его слушателей, а въ случаѣ надобности—и со стороны самого учителя. Опредѣленія и правила при этомъ могутъ быть (конечно, послѣ соотвѣтственной предварительной классной проработки и разъясненій) усвоены по учебнику, почти слово-въ-слово, даже наизусть, но не простымъ выучиваніемъ наизусть, а благодаря усвоенію мыслей и идей, составляющихъ внутреннее содержаніе этихъ опредѣленій и правилъ. Важно не то, что «лучше учебника скажешь», — какъ говаривали встарину учителя, для которыхъ методическія цѣли обученія не существовали,—а то, что учащихся слѣдуетъ пріучать къ сжатому изложенію мыслей, примѣромъ и образцомъ которыхъ должно быть изложеніе учебника.

Что можно усвоить на-память? Само собою при этомъ разумѣется, что только то можетъ быть въ благоустроенной начальной школѣ усвоено памятью, что уже вполнѣ, такъ сказать, до тонкости извѣстно ученику и что имъ въ совершенствѣ усвоено на практикѣ (таковы правила производства дѣйствій) или во время урока (таковы опредѣленія и всяческія разсужденія ариѳметическаго содержанія). Начальному учителю отнюдь не должно забывать, что заучиваніе наизусть не усвоеннаго и не понятаго учащимся текста—не только безполезно, но даже прямо вредно. Съ другой стороны, педагогика осуждаетъ только безсмысленное заучиваніе словъ наизусть, вовсе не будучи склонна отрицать необходимость разумнаго и полнаго усвоенія учебнаго матеріала во многихъ случаяхъ учебной практики. Въ учебникѣ каждое ученіе, каждая фраза и даже каждое слово должны ученикамъ напоминать цѣлый рядъ практическихъ умѣній и ариѳметическихъ мыслей, имъ уже ранѣе усвоенныхъ на урокахъ. Поэтому, при проработкѣ, подъ своимъ руководствомъ, текста того или иного учебника, учитель долженъ выяснять этотъ текстъ вполнѣ подробно, отыскивая съ ученикамъ причины—почему данное ученіе выражено такъ, а не иначе, почему употреблено то, а не иное слово, и т. д. Такъ, напр., при прохожденіи текста всякаго учебника ариѳметики придется обратить вниманіе на совокупность опредѣленій, на различіе между общепринятыми, для удобства, правилами (способами производства

дѣйствія) и ученіями, не заключающими въ себѣ ничего условнаго, и т. д. Разъясненій потребуютъ также ученія о провѣркѣ дѣйствій, о нумераціи, и представленія о томъ, что такое число, единица, величина и т. п. *).

На что обращать вниманіе? Особенно внимательно учитель долженъ относиться, во-первыхъ, къ различію между тѣми ученіями, которыя необходимо вытекаютъ изъ основныхъ понятій о дѣйствіяхъ, и тѣми, которыя отличаются большею или меньшею условностью, во-вторыхъ, вообще къ различію между необходимостью, полезностью или дозволительностью чего-либо. Напр., при умноженіи числа на 10 письменное обозначеніе произведенія непремѣнно будетъ отличаться отъ письменнаго обозначенія множимаго нулемъ на мѣстѣ единицъ, число, дѣлящееся на 4, непремѣнно дѣлится по-поламъ на-цѣло, и т. д. Не необходимо, но за-то полезно подписывать многозначныя слагаемыя одно подъ другимъ: полезно, но не необходимо, приводить дроби, при сложеніи ихъ, къ наименьшему знаменателю, и т. п.—Обращать вниманіе на подобныя различія возможно, конечно, только тогда, когда въ дѣтяхъ вообще, и въ особенности при проработкѣ ими текста учебника, поддерживался и развивался духъ сознательнаго отношенія къ дѣлу. Только при соблюденіи этого условія усвоеніе дѣтьми текста учебника на-память совершится какъ бы само собою и приноситъ несомнѣнную пользу дѣлу. Лишь при соблюденіи этого условія возможно, чтобы текстъ учебника былъ вполнѣ усвоенъ учащимися не только по смыслу своему, во всемъ своемъ внутреннемъ значеніи, но и въ своемъ словесномъ выраженіи, въ своей словесной формулировкѣ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Распредѣленіе курса ариѳметики по годамъ начальной школы и духъ обученія.

Необходимость концентрическаго распредѣленія курса. § 1. Необходимость распредѣленія учебныхъ предметовъ начальной одноклассной школы кругами, т. е. необходимость концентрическаго распредѣленія его, обусловливается тѣмъ практически важнымъ обстоятельствомъ, что каждый изъ годовъ обученія въ этихъ учебныхъ заведеніяхъ долженъ дать учащимся болѣе или менѣе законченныя свѣдѣнія по каждому изъ предметовъ обученія. Въ каждомъ учебномъ предметѣ есть болѣе существенное и менѣе существенное.

*) Для удовлетворенія практическимъ этимъ потребностямъ, мною составлена „Ариѳметика для начальныхъ школъ“, Спб., 1903 (ц. 15 коп.).

При такъ называемой „поступательной“ системѣ ученія даннаго предмета проходятся сподрядъ, одно за другимъ, каждое во всѣхъ своихъ подробностяхъ, со всѣми частностями, притомъ въ такомъ порядкѣ, какъ данный предметъ изложенъ въ учебникѣ. Такой порядокъ, однако, не всегда удовлетворителенъ не только съ практической, но и съ педагогической точки зрѣнія. Практическія его неудобства состоятъ въ томъ, что учащіеся, почему-либо не кончающіе курса въ томъ учебномъ заведеніи, въ которомъ онъ принятъ, выходятъ изъ него безъ законченныхъ знаній, а съ одними лишь обрывками ничѣмъ не связанныхъ другъ съ другомъ свѣдѣній по каждому предмету. Педагогическая же неудовлетворительность его обусловливается тѣмъ, что ученикъ, при слѣдованіи поступательному распорядку курса, иногда не въ состояніи отличить существенное отъ второстепеннаго. Онъ не получаетъ должнаго понятія о данномъ учебномъ предметѣ, какъ о нѣкоторомъ неразрывномъ, стройномъ цѣломъ, проникнутомъ во всѣхъ своихъ частяхъ единою общею цѣлью.—Пройденное въ теченіе перваго года въ одноклассной начальной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ непремѣнно должно быть центромъ, средоточіемъ всего курса, — средоточіемъ, вокругъ котораго должны быть расположены и къ которому, такъ сказать, должны тяготѣть остальныя ученія даннаго предмета.

Распред. курса. § 2. Курсъ ариѳметики, который сводится къ изученію производства ариѳметическихъ дѣйствій, долженъ опираться на постепенное развитіе соотвѣтствующихъ ариѳметическихъ представленій и понятій. Поэтому въ первый годъ обученія, если это возможно, должны бы быть пройдены: нумерація и четыре ариѳметическихъ дѣйствія въ примѣненіи къ простѣйшимъ случаямъ, во второй — тѣ же дѣйствія во всѣхъ своихъ частностяхъ и въ примѣненіи къ случаямъ, менѣе очевидно требующимъ этихъ дѣйствій, наконецъ, въ третій — болѣе или менѣе закругленный курсъ ариѳметики по учебнику. Таковымъ въ общихъ чертахъ долженъ былъ бы быть курсъ занимающаго насъ предмета, если мы стремимся къ тому, чтобы концентрація курса была точно и строго выполнена. Но, къ сожалѣнію, въ нашей, даже вполнѣ правильно устроенной, начальной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ, обученію посвящается не болѣе шести мѣсяцевъ въ теченіе всего учебнаго года. Поэтому въ ней вполнѣ точно держаться выше намѣченнаго плана невозможно безъ явнаго ущерба для дѣла. Такая концентрація была бы воз-

можна, если бы эта школа могла посвящать обученію, по крайней мѣрѣ, девять мѣсяцевъ. Важно принять къ свѣдѣнію, что въ первый годъ обученія въ трехгодичной одноклассной начальной школѣ почти невозможно пройти, хотя бы сколько-нибудь удовлетворительно, всѣ четыре дѣйствія надъ числами любой величины.

Курсъ 1-го года. Какой же возможенъ выходъ изъ этого положенія? Весь вопросъ въ томъ — какія ариѳметическія познанія наиболѣе существенны какъ въ практическомъ, такъ и въ образовательномъ отношеніи. Безъ всякаго сомнѣнія, такими познаніями: а) четыре дѣйствія надъ числами первой сотни, б) нумерація, и в) первыя два ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами перваго класса. Эти знанія могутъ и должны быть усвоены учащимися младшаго отдѣленія. Наконецъ, въ тотъ же курсъ перваго года могутъ войти также нѣкоторыя представленія объ обыкновенныхъ дробяхъ.—Первая сотня во всякомъ случаѣ должна быть къ концу перваго года въ полномъ распоряженіи учащагося, притомъ не столько при письменномъ, сколько при изустномъ вычисленіи. Школа, не дающая этого въ теченіе перваго года, не можетъ считать достигнутые ею результаты удовлетворительными. Практически же это легко выполнимо.

Разъ курсъ перваго года обученія въ общихъ чертахъ такимъ образомъ намѣченъ, то распредѣленіе курса остальныхъ годовъ является уже дѣломъ сравнительно не труднымъ: во второй годъ курсъ ариѳметики долженъ быть законченъ, а въ третій—приведенъ въ порядокъ и дополненъ, притомъ по возможности съ помощью краткаго учебника.

Курсъ остальныхъ лѣтъ. § 3. Въ первое полугодіе второго года должны быть пройдены нумерація, сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе любыхъ многозначныхъ чиселъ и примѣненіе этихъ дѣйствій къ случаямъ не очевиднымъ. Во второе полугодіе того же года должны быть пройдены ученія объ именованныхъ числахъ и пріобрѣтенъ нѣкоторый навыкъ въ рѣшеніи сложныхъ (но не замысловатыхъ) ариѳметическихъ задачъ. Наконецъ, въ теченіе третьяго года обученія должны быть пройдены: болѣе систематическій курсъ по учебнику, ученіе о дробяхъ и примѣненія этого ученія къ рѣшенію задачъ на тройныя правила, на правило процентовъ и т. п.—Главное условіе возможности усвоенія такого курса сводится къ воздержанію отъ задачъ слишкомъ сложныхъ и слишкомъ замысловатыхъ.

Курсъ, такъ называемыхъ, училищъ (одноклассныхъ, двуклассныхъ, трехклассныхъ и четырехклассныхъ) гораздо выше трехгодичнаго курса тѣхъ начальныхъ школъ, къ типу которыхъ принадлежитъ большинство народныхъ школъ, сельскихъ и городскихъ. По положенію о городскихъ училищахъ, Высочайше утвержденному 31-го мая 1872 г., всѣ училища (одноклассныя, двуклассныя и проч.) въ томъ отношеніи сходны между собою, что курсъ ученія въ нихъ шестилѣтній, а разнятся они другъ отъ друга количествомъ лѣтъ ученія въ классахъ. Въ т. наз. одноклассныхъ училищахъ, конечно, одинъ классъ съ тремя послѣдовательными отдѣленіями, но въ каждомъ дѣти остаются по два года. Въ двуклассныхъ — два класса, изъ которыхъ въ первомъ ученіе продолжается четыре года подъ-рядъ, а во второмъ—два года. Въ училищахъ трехклассныхъ—три класса, курсъ каждаго изъ которыхъ продолжается два года. Наконецъ, въ четырехклассныхъ училищахъ курсъ первыхъ двухъ классовъ продолжается по два, а курсъ остальныхъ двухъ лѣтъ — по одному году. Само собою разумѣется, что не только многоклассное, но даже одноклассное училище имѣетъ въ своемъ распоряженіи гораздо (вдвое) больше времени, и вслѣдствіе этого, гораздо лучше можетъ исполнить свои задачи, чѣмъ обыкновенная начальная (сельская и даже городская) одноклассная школа съ трехгодичнымъ курсомъ. Понятно также, что въ курсѣ начальной ариѳметики однокласснаго училища концентрація курса можетъ быть лучше выдержана, чѣмъ въ начальной школѣ. Въ первомъ отдѣленіи однокласснаго училища, въ теченіе двухъ лѣтъ пребыванія въ немъ учащихся, можетъ быть пройдено то же, что проходится въ теченіе перваго года начальной школы. Но при этомъ пріобрѣтаемыя учащимися въ теченіе двухъ лѣтъ познанія будутъ отличаться большею степенью округленности, чѣмъ какою они отличаются при усвоеніи ихъ дѣтьми въ теченіе одного лишь года. Можно безъ всякаго насилія надъ учителемъ и учащимися предположить, что въ теченіе первыхъ двухъ лѣтъ обученія въ одноклассномъ училищѣ съ шестилѣтнимъ курсомъ возможно пройти всѣ дѣйствія надъ числами перваго класса, т. е. числами трехзначными. Во второмъ отдѣленіи однокласснаго училища можетъ быть закончена ариѳметика цѣлыхъ чиселъ и заложено начало болѣе полнаго курса дробей и начальнаго курса практической геометріи. Наконецъ, въ третьемъ отдѣленіи можетъ быть пройденъ, повторенъ, а также дополненъ въ своихъ частностяхъ курсъ ариѳметики и геометріи какъ систематически, по учебнику, такъ и практически, въ примѣненіи къ задачамъ.

Курсъ одноклассныхъ, двуклассныхъ и многоклассныхъ училищъ.

Что касается концентраціи курса ариѳметики въ многоклассныхъ училищахъ въ теченіе первыхъ трехъ или четырехъ лѣтъ, то въ нихъ обязательно долженъ быть пройденъ весь курсъ начальной школы съ трехгодичнымъ курсомъ, и курсъ долженъ быть распредѣленъ приблизительно на тѣхъ же основаніяхъ, которыя соблюдаются при распредѣленіи

курса одноклассной начальной школы. (Преподаванію полнаго курса ариѳметики посвящены вторые выпуски составленныхъ авторомъ настоящаго руководства „Задачника для учителей“ и „Задачника для учениковъ“ и „Методики ариѳметики“, ч. II).

Курсъ перваго года.

§ 4. Въ § 2 этой же главы къ курсу перваго года обученія въ начальной трехгодичной школѣ отнесены: 1) Нумерація и дѣйствія сложенія и вычитанія въ предѣлахъ чиселъ перваго класса, 2) дѣйствія умноженія и дѣленія въ предѣлахъ таблицы умноженія, 3) первоначальныя представленія о дробяхъ и 4) полная власть надъ числами первой сотни.

Дѣйствія сложенія и вычитанія въ примѣненіи къ простѣйшимъ случаямъ этихъ дѣйствій, а равно нумерація представляютъ собою легчайшую часть курса перваго года. Дѣйствія же умноженія и дѣленія въ предѣлѣ 1-ой сотни отнесены въ этотъ курсъ и потому, что упражненія въ этихъ дѣйствіяхъ вносятъ въ курсъ перваго года необходимое, съ педагогической точки зрѣнія, разнообразіе. Кромѣ того, дѣтьми, благодаря этимъ упражненіямъ, будетъ усвоена таблица умноженія. Знаніе это важно, съ практической точки зрѣнія, во-1-хъ, какъ знаніе, которое необходимо для дальнѣйшихъ ступеней курса, и во-2-хъ, какъ такое знаніе, безъ котораго крайне трудно обойтись въ практической жизни. Что же касается начальнаго представленія о дробяхъ, то выработка его въ теченіе перваго года обученія полезна главнымъ образомъ въ развивательномъ отношеніи. Для дальнѣйшаго курса выработка надлежащихъ представленій о дробяхъ также важна, какъ нумерація для ученія о производствѣ дѣйствій надъ цѣлыми числами. Власть надъ первою сотнею—конечная цѣль курса перваго года. Власть надъ дѣйствіями съ цѣлыми числами — конечная цѣль курса второго года. Власть надъ ученіями ариѳметики цѣлыхъ чиселъ и надъ простѣйшими примѣненіями дробей — цѣль курса третьяго года обученія.

Мѣсто ученій объ именов. числахъ и о тройныхъ правилахъ.

§ 5. Для достиженія выше намѣченныхъ цѣлей, весьма важно уяснить себѣ мѣсто именованныхъ чиселъ въ курсѣ начальной трехгодичной школы. Вслѣдствіе кратковременности этого курса и по причинѣ оставленія школы большинствомъ учащихся до окончанія полнаго въ ней курса, необходимо размѣстить ученіе о такъ наз. именованныхъ числахъ такъ, чтобы въ курсъ каждаго года входили доступныя, на данной ступени, части его. Къ тому же подобное размѣщеніе согласно и съ логическими основаніями ученія объ именованныхъ числахъ. Дѣло въ томъ, что новаго, по существу, ученіе объ именованныхъ числахъ ничего не содержитъ. Преобразованія именованныхъ числахъ (простыхъ и даже составныхъ) и дѣйствія надъ ними представляютъ собою только приложеніе ученій о числахъ отвлеченныхъ.

Единицы мѣры.

Въ первый же годъ обученія поэтому необходимо своевременное и попутное ознакомленіе дѣтей съ нѣкоторыми мѣрами: денегъ, длины и вѣса, хотя бы и не во всемъ ихъ объемѣ, и (въ предѣлахъ возможнаго) съ пріемами раздробленія нѣкоторыхъ именованныхъ чиселъ. Эти знанія необходимо сообщить дѣтямъ преимущественно съ развивательной точки зрѣнія, такъ какъ жизнь и сама не преминетъ въ свое время сообщить эти знанія бывшему ученику начальной школы. Кромѣ своего развивательнаго значенія, указанныя знанія въ курсѣ перваго года даютъ возможность полезнымъ образомъ расширить матеріалъ задачъ и упражненій какъ надъ цѣлыми, такъ и надъ дробными числами. Въ курсъ второго года должно войти ознакомленіе съ остальными мѣрами, за исключеніемъ мѣръ поверхности, объемовъ и времени, но съ болѣе усиленной практикою надъ именованными числами. Наконецъ, въ третій годъ изъ этого ученія должны быть пройдены не усвоенныя мѣры и задачи на вычисленіе времени, поверхностей и объемовъ (послѣднее въ связи съ нѣкоторыми первоначальными ученіями геометріи), а также систематически проработано все, относящееся до отвлеченныхъ и именованныхъ чиселъ, по учебнику.

Тройныя и другія правила.

§ 6. Что касается такъ называемыхъ тройныхъ правилъ, то нѣкоторыя задачи этого рода должны быть размѣщены въ курсѣ слѣдующимъ образомъ: въ первый годъ дѣти должны освоиться съ простымъ тройнымъ правиломъ, когда отъ раздѣленія не получается дробнаго числа (эта часть курса послужитъ также и къ лучшему усвоенію таблицы умноженія), во второй годъ—съ тѣмъ же правиломъ для случая, когда въ результатѣ дѣленія получаются многозначныя числа, и съ такъ называемымъ правиломъ смѣшенія (перваго рода), въ третій—съ правиломъ процентовъ и, если то позволитъ время, съ простымъ тройнымъ, требующимъ познаній относительно дробей, съ правиломъ пропорціональнаго дѣленія и сложнымъ тройнымъ.

Распредѣленіе курса дробей.

§ 7. Нѣкоторыя затрудненія представляютъ также опредѣленіе границъ и распредѣленіе по годамъ курса дробей, умѣстнаго въ курсѣ начальной одноклассной

трехгодичной школы. Не подлежитъ никакому сомнѣнію, что болѣе или менѣе полное изложеніе теоріи дѣлителей въ начальной школѣ неумѣстно какъ по причинѣ большихъ трудностей этой статьи, такъ и по причинѣ недостатка времени, имѣющагося въ распоряженіи этой школы. Отсюда съ очевидностью вытекаетъ, что полное ученіе о дробяхъ тоже неумѣстно въ занимающемъ насъ курсѣ ариѳметики. Эта невозможность введенія теоріи дѣлителей въ курсъ сразу приводитъ къ тому, что въ немъ неумѣстны и полныя ученія о сокращеніи и о приведеніи дробей къ общему наименьшему знаменателю, а вмѣстѣ съ тѣмъ—также о сложеніи и вычитаніи всякихъ дробей. Дѣти въ начальной школѣ могутъ быть ознакомлены съ признаками дѣлимости чиселъ на 2, 5 и на 10; въ предѣлахъ этого знанія они могутъ быть ознакомлены и съ сокращеніемъ дробей. Далѣе дѣтей можно научить приведенію дробей къ общему знаменателю, равному (въ случаѣ крайности) хотя бы даже произведенію знаменателей данныхъ дробей, и въ предѣлахъ этого знанія они могутъ научиться производству сложенія и вычитанія дробей. Но еще лучше ограничиваться вычисленіями только надъ половинами, четвертями, восьмыми, шестнадцатыми, третями, шестыми, двѣнадцатыми, десятыми и сотыми, а не останавливаться надъ рѣдко употребительными въ жизни и наукѣ дробями: седьмыми, семнадцатыми, двадцать-первыми и т. п.

За-то, благодаря такой постановкѣ дѣла, дѣтей съ успѣхомъ можно научить умноженію и дѣленію дроби на всякое цѣлое число, а равно и отысканію частей даннаго цѣлаго и отысканію цѣлаго по данной части его (т. е. другими словами—умноженію и дѣленію на дробь). Но этотъ курсъ можетъ быть проведенъ только во второй и третій годы обученія— не ранѣе, и долженъ отличаться, конечно, возможно большею простотой. При этомъ дѣти должны умѣть находить часть даннаго цѣлаго и цѣлое по данной части его, не проходя ученія объ умноженіи и дѣленіи на дробь и даже не зная, что нахожденіе части цѣлаго называется иногда умноженіемъ на дробь и что нахожденіе цѣлаго по извѣстной части его можно считать дѣленіемъ на нѣкоторую дробь.

Десятичныя дроби.

Что касается дробей десятичныхъ, то о нихъ въ третій годъ обученія слѣдуетъ дать представленіе, причемъ можно стремиться лишь къ тому, чтобы ученики вынесли умѣніе прочесть десятичную дробь и понимали составъ десятичной дроби изъ десятичныхъ долей единицы. Только въ школахъ, особенно благоустроенныхъ или съ высшимъ курсомъ, учитель можетъ задаваться сообщеніемъ большаго количества знаній изъ этой, хотя и не особенно трудной, но все-таки довольно обширной статьи.

Тяготѣніе нѣк. ученій къ общему центру.

§ 8. По чисто-историческимъ причинамъ, давно уже утратившимъ свою силу и не имѣющимъ нынѣ ни математическаго, ни педагогическаго значенія, многія задачи, по существу и даже во всемъ составѣ своемъ однородныя, относятся обыкновенно къ различнымъ частямъ курса. Не только въ курсѣ начальной школы, но и въ курсѣ болѣе полномъ, учитель долженъ помнить, если можно такъ выразиться, о тяготѣніи задачъ и упражненій одного рода къ общему центру, какъ бы далеко они другъ отъ друга ни отстояли въ другихъ задачникахъ и курсахъ. Такъ, напр.: а) вопросъ о томъ, сколько всѣхъ единицъ перваго разряда въ данномъ многозначномъ числѣ десятковъ, сотенъ или единицъ другихъ высшихъ разрядовъ, относится не къ нумераціи непосредственно, а къ умноженію; вопросъ же о томъ—сколько всѣхъ единицъ того или другого высшаго разряда въ данномъ числѣ единицъ низшаго разряда, относится тоже не къ нумераціи, а къ дѣленію; б) вопросы такъ назыв. раздробленія простыхъ именованныхъ чиселъ въ полномъ объемѣ своемъ принадлежатъ къ числу задачъ на умноженіе, вопросы же о раздробленіи составныхъ именованныхъ чиселъ принадлежатъ къ числу задачъ на умноженіе и сложеніе чиселъ; равнымъ образомъ вычитаніе составныхъ именованныхъ чиселъ и вычитаніе простого именованнаго числа низшаго наименованія изъ числа наименованія высшаго не представляютъ вопроса сколько-нибудь самостоятельнаго, а являются либо вопросомъ только вычитанія, либо же вопросомъ сложенія (чаще всего изустнаго) и слѣдующаго за нимъ простого вычитанія; в) по подобной причинѣ въ качествѣ задачъ на дѣленіе можно предлагать многія задачи на такъ наз. превращеніе именованныхъ чиселъ; г) къ вопросамъ объ измѣненіи результата дѣйствія въ зависимости отъ данныхъ чиселъ являющимся во всѣхъ задачникахъ статьею, не имѣющею почти никакихъ практическихъ примѣненій, а потому усваиваемою учащимися безъ должнаго разумѣнія, прямо необходимо пріурочить многочисленныя упражненія, допускающія множество упрощеній въ письменномъ производствѣ первыхъ трехъ дѣйствій, напр., прибавленіе и вычитаніе такихъ чиселъ, какъ 98, 99, 999 и т. п., умно-

женіе на подобныя числа, на 15, на 25, на 5 на 75 и т. д.; д) въ отдѣлѣ на нахожденіе опредѣленной части даннаго числа и на нахожденіе цѣлаго, по извѣстной опредѣленной части его, можетъ быть отведено мѣсто вопросамъ о нахожденіи нѣкотораго числа процентовъ даннаго числа и процентнаго отношенія одного числа къ другому; е) нѣкоторое мѣсто въ томъ же отдѣлѣ можно отвести вопросамъ такъ наз. простого тройного правила, столь же сильно тяготѣющимъ и столь же тѣсно примыкающимъ, съ логической и математической точки зрѣнія, къ этому отдѣлу, на сколько простѣйшія задачи на простое тройное правило, не требующія сокращенія дробей („3 аршина ситца стоятъ 21 коп., что стоятъ 5 аршинъ?“ „5 аршинъ сукна стоятъ 35 р., сколько сукна можно купить на 49 руб.“), примыкаютъ къ числу простѣйшихъ задачъ на послѣдовательное отысканіе частнаго и произведенія или задачъ на послѣдова ельное отысканіе частнаго и отношенія,—тѣмъ болѣе, что и самый способъ такъ называемаго приведенія къ единицѣ представляетъ собою, конечно, не иное что, какъ именно послѣдовательное отысканіе частнаго и произведенія или, иначе говоря, части цѣлаго и цѣлаго по части его; ж) не мало задачъ того же рода можетъ быть отнесено къ отдѣламъ задачъ на умноженіе и дѣленіе обыкновенныхъ дробей.

Для наилучшаго распредѣленія подлежащаго проработкѣ ариѳметическаго матеріала, такимъ образомъ, должно обращать побольше вниманія на то, какія ученія одно съ другимъ связаны или соприкасаются, и на основаніи этого слѣдовать, въ этомъ распредѣленіи, требованіямъ тяготѣнія ученій однородныхъ къ одному и тому же общему началу, къ общему средоточію или центру.

Задачники. § 9. Сообразно съ вышеизложенными требованіями распредѣленія курса, составлены первые выпуски „Задачника для учителей“ и „Задачника для учениковъ“, въ коихъ курсъ раздѣленъ на ступени. Ни ученики, ни даже учитель не должны помнить — что на какой ступени проходится. Изъ обѣихъ этихъ книгъ вторая („Задачникъ для учениковъ“) составляетъ отдѣльное пособіе, выдаваемое на руки учениковъ. Задачи и упражненія въ обѣихъ книжкахъ расположены методически, т. е. сообразно постепенному ходу занятій и требованіямъ методики занимающаго насъ предмета.

Подготовка учителя къ урокамъ. Учащій предъ каждымъ урокомъ долженъ (въ началѣ пользованія книгами) хотя бы только пробѣжать нужныя ему для этого урока задачи и упражненія „Задачника для учителей“, замѣчанія, которыми они снабжены, и соотвѣтствующія упражненія изъ „Задачника для учениковъ“. Если онъ это сдѣлаетъ, то, конечно, дѣло

пойдетъ какъ слѣдуетъ, и онъ не будетъ имѣть основаній для жалобъ на малоуспѣшность своихъ занятій съ учениками. Въ противномъ случаѣ, т. е. если учитель готовиться къ своимъ урокамъ почему-либо совсѣмъ не станетъ, ему будетъ неизвѣстна цѣль работы и упражненій, и поэтому легко можетъ оказаться, что и онъ, и учащіеся не только очень устанутъ отъ этой работы, но даже прямо не достигнутъ должныхъ результатовъ. На задачи и упражненія каждой ступени обученія, предлагаемыя въ „Задачникѣ для учителей“, должно смотрѣть какъ на примѣрныя задачи и упражненія, съ содержаніемъ которыхъ учащій долженъ вполнѣ ознакомиться (въ особенности для первыхъ ступеней), дабы изустныя упражненія предлагать учащимся наизусть, безъ помощи книги,—отъ чего выигрываетъ и живость урока, и непосредственное вліяніе учащаго на представленіе и мышленіе учащихся. Выполненіе же учащимися упражненій изъ „Задачника для учениковъ“ предполагаетъ только два условія: 1) учащіеся должны знать — какъ имъ выполнять работы, и 2) они должны быть пріучаемы къ возможно изящному и согласному съ указаніями учителя выполненію этихъ работъ. При этомъ само собою разумѣется, что многія работы надо выполнить по нѣсколько разъ и что слишкомъ трудныя задачи (а иногда и вычисленія) должны быть предлагаемы, особенно въ качествѣ самостоятельныхъ упражненій, только вполнѣ успѣвающимъ и сильнымъ ученикамъ.

Списокъ отвѣтовъ. Приложенный къ „Задачнику для учителей“ списокъ отвѣтовъ на многія упражненія, предложенныя въ „Задачникѣ для учениковъ“, долженъ служить для провѣрки полученныхъ дѣтьми результатовъ: практикъ-учитель должнымъ образомъ оцѣнитъ пользу подобнаго списка отвѣтовъ. Отвѣты же на упражненія и задачи „Задачника для учителей“ нельзя считать необходимыми, такъ какъ учащіеся прорабатываютъ эти упражненія подъ непосредственнымъ воздѣйствіемъ и руководствомъ учащаго.

Раздѣленіе курса на ступени. Употребляя оба „Задачника“, учитель долженъ помнить, что пропускать нѣкоторыя упражненія на какой-либо ступени онъ вправѣ только въ томъ случаѣ, если убѣдится, что ученики совершенно освоились съ представленіями и познаніями, составляющими содержаніе ступени. Чаще ему придется, особенно при самостоятельныхъ упражненіяхъ учениковъ, возвращаться къ упражненіямъ какой-либо изъ предыдущихъ ступеней. Но пропускать всѣ упражненія какой-нибудь промежуточной ступени учителю почти навѣрное не придется, и если онъ себѣ что-либо подобное позволитъ, то это приведетъ только къ пониженію успѣховъ его учениковъ въ ариѳметикѣ.

Опусканіе нѣк. упражненій. § 10. Раздѣленіе курса ариѳметики, подлежащаго усвоенію учениками начальной одноклассной школы съ трехгодичнымъ курсомъ, на ступени преслѣдуетъ цѣли методическія и проистекаетъ изъ соображеній логическихъ и методическихъ. Каждое изъ ученій этого курса, за исключеніемъ умѣнія считать, предполагаетъ, что нѣкоторыя представленія уже существуютъ, что нѣкоторыя понятія уже образованы въ умѣ учениковъ,

что нѣкоторыя умѣнія или познанія уже усвоены учениками. Весь вопросъ въ томъ, чтобы эти представленія и понятія были выработаны, а умѣнія и познанія своевременно проработаны. Возьмемъ примѣръ: пусть требуется дѣтей научить сложенію двухъ однозначныхъ чиселъ, дающихъ въ суммѣ болѣе десяти. Очевидно, что для уразумѣнія этого сложенія ученикамъ необходимы: умѣніе составлять десятокъ, умѣніе вычитать однозначное число изъ однозначнаго и умѣніе прибавлять однозначное число къ десятку. Поэтому сложеніе однозначныхъ чиселъ, дающихъ въ суммѣ болѣе десяти, отнесено къ 8-ой ступени, въ то время какъ на 7-ой ученики научаются сложенію десятка съ однозначнымъ числомъ, на 6-ой—вычитанію однозначнаго числа изъ однозначнаго, а на 5-ой—составленію десятка.

Духъ обученія. § 11. Но самое главное условіе успѣха занятій по предмету ариѳметики состоитъ въ томъ, чтобы во всѣ моменты обученія ариѳметикѣ, на всѣхъ его ступеняхъ, т. е. при обученіи изустнымъ и письменнымъ вычисленіямъ, при рѣшеніи задачъ и выполненіи письменныхъ работъ, при изученіи учебника, учащійся былъ воспитываемъ въ духѣ уваженія и истинной любви къ правдѣ, въ духѣ уваженія къ здравому смыслу, къ сознательной работѣ и къ доброй волѣ человѣка въ преодолѣніи препятствій на пути къ знанію. Онъ долженъ быть воспитываемъ въ духѣ уваженія къ истинному знанію, къ искреннему и безкорыстному стремленію пріобрѣсти его и къ стремленію сохранить знаніе на всю жизнь.— Безъ воспитанія въ дѣтяхъ *этого уваженія* обученіе предметамъ, не соприкасающихся прямо съ нравственностью, ограничивается лишь малоцѣнною, съ точки зрѣнія истинныхъ требованій разумнаго воспитанія, выучкою и дрессировкою дѣтей въ тѣхъ или иныхъ особенныхъ направленіяхъ. Эта выучка далеко не всегда заслуживаетъ сочувствія, являясь иногда лишь слѣдствіемъ недоразумѣнія или временнаго увлеченія. Школа должна стремиться къ болѣе несомнѣннымъ, высокимъ, вѣчнымъ, идеальнымъ цѣлямъ, которыя недостижимы безъ воспитанія дѣтей въ намѣченномъ направленіи. Но это воспитаніе можетъ учителю удаться только въ томъ случаѣ, если онъ будетъ соблюдать истинныя требованія разумнаго обученія ариѳметикѣ, — требованія: а) наглядности пріемовъ обученія, б) простоты учебнаго матеріала, в) цѣлесообразности упражненій, г) надлежащей концентраціи курса, д) постепенности въ распредѣленіи курса, е) надлежащаго духа обученія, и, въ связи со всѣми этими особенностями обученія, ж) самодѣятельной работы учениковъ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Первый годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ.

14 ступеней курса 1-го г.

§ 1. Курсъ ариѳметики, который можетъ и долженъ быть пройденъ въ теченіе перваго же года обученія, распадается на четырнадцать ступеней: 1) упражненіе дѣтей въ сознательномъ устномъ счетѣ отъ одного до двадцати включительно; 2) ознакомленіе дѣтей съ арабскими цифрами отъ 1 до 9 включительно; 3) прибавленіе единицы къ числамъ не большимъ восьми, знаки + и =, отниманіе единицы отъ чиселъ, меньшихъ десяти, и знакъ (—) вычитанія; 4) обозначеніе двузначныхъ чиселъ отъ 11-ти до 19-ти включительно, а также обозначеніе 10-ти и 20-ти; 5) сложеніе чиселъ, сумма которыхъ не болѣе 10-ти; 6) вычитаніе однозначныхъ чиселъ изъ чиселъ, меньшихъ 11-ти; 7) сложеніе одного десятка съ однозначнымъ числомъ и разложеніе двузначныхъ чиселъ, отъ 11-ти до 19-ти включительно, на сумму одного десятка съ соотвѣтствующимъ однозначнымъ числомъ; 8) сложеніе чиселъ, сумма которыхъ болѣе десяти и менѣе двадцати, и соотвѣтствующее вычитаніе; 9) сложеніе нѣсколькихъ однозначныхъ слагаемыхъ, умноженіе двухъ чиселъ, произведеніе которыхъ менѣе двадцати, и понятіе о дробяхъ ($^1/_2$, $^1/_4$ и $^3/_4$); 10) нумерація двузначныхъ чиселъ; 11) сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ и таблица умноженія; 12) выясненіе дѣтямъ дѣленія числа на извѣстное число равныхъ между собою частей (въ предѣлахъ таблицы умноженія); 13) дѣленіе числа по содержанію, т. е. кратное сравненіе чиселъ (въ тѣхъ же предѣлахъ); 14) нумерація трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ и сложеніе и вычитаніе въ тѣхъ же предѣлахъ.

1-ая ступень: счетъ.

§ 2. Первѣе всего учитель, на первомъ же урокѣ по предмету ариѳметики, долженъ уяснить себѣ, въ какой мѣрѣ и до какого предѣла ученики младшаго отдѣленія обладаютъ важнѣйшимъ для возможности обученія этому предмету умѣніемъ, а именно умѣніемъ *сознательно* считать. Крестьянскія дѣти семи или восьмилѣтняго возраста, по большей части, не затрудняются произнесеніемъ нѣкотораго ряда числительныхъ именъ въ ихъ натуральномъ порядкѣ. Но изъ этого не слѣдуетъ, что всѣ дѣти въ состояніи дѣйствительно сосчитать соотвѣтствующее ихъ словесному знанію количество *вещественъ-*

ныхъ предметовъ. Случается, что иной ребенокъ этого возраста отлично знаетъ слова: одинъ, два, три и т. д., т. е. умѣетъ произносить ихъ въ надлежащемъ порядкѣ и даже понимаетъ цѣль счета, но не въ состояніи дѣйствительно сосчитать соотвѣтствующаго его словеснымъ знаніямъ числа предметовъ, коль скоро это число превышаетъ нѣкоторый предѣлъ. Этотъ предѣлъ часто значительно ниже предѣла извѣстныхъ ему числительныхъ именъ. Напр., вы даете ребенку болѣе или менѣе значительное количество кубиковъ и требуете отъ него, чтобы онъ сосчиталъ, сколько ихъ. Сначала дѣло идетъ довольно складно: произнося то или другое числительное имя, ученикъ отдѣляетъ одинъ изъ сосчитываемыхъ предметовъ отъ остальныхъ, еще не сосчитанныхъ. Но вскорѣ онъ начинаетъ отбирать либо больше, либо меньше, чѣмъ слѣдуетъ, предметовъ, сбивается въ счетѣ и, конечно, такимъ образомъ дѣлаетъ ошибку противъ самой цѣли, противъ сущности этого дѣла. Это значитъ, что онъ считать (сознательно считать) не умѣетъ. Если же онъ ошибокъ не дѣлаетъ, то считать умѣетъ.—Поэтому учащій долженъ убѣдиться не только въ знакомствѣ дѣтей со словами, сопровождающими счетъ, и порядкомъ этихъ словъ, но также въ дѣйствительномъ умѣніи сосчитать то или другое количество предметовъ. Если дѣти не умѣютъ сознательно и вѣрно считать до двадцати, то ихъ этому слѣдуетъ научить прежде всего: съ дѣтьми, не умѣющими считать до двадцати, никакія занятія по ариѳметикѣ не могутъ быть оправданы никакими соображеніями. Не будучи тверды въ счетѣ, дѣти бываютъ невнимательны на урокахъ ариѳметики, такъ какъ имена числительныя ничего не говорятъ ихъ уму и воображенію. Въ такомъ случаѣ у нихъ нѣтъ привычки связывать называемое ими и учителемъ число съ неразрывно присущимъ послѣднему счетомъ. Ихъ раньше всего надо научить счету: а) сначала пяти и до десяти, б) потомъ — до пятнадцати и двадцати. Кто умѣетъ считать до десяти, скоро научается считать и до двадцати.

Обученіе счету до двадцати. Изъ числительныхъ именъ указаннаго предѣла (отъ одного до двадцати включительно) только первыя десять суть слова первообразныя (не производныя). Что же касается числительныхъ именъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, то ихъ происхожденіе въ русскомъ языкѣ подчиняется единообразному закону. Однако, слова „одиннадцать“, „двѣнадцать“ и т. д. до „девятнадцати“ включительно—слова

все-таки болѣе или менѣе новыя. Въ русскомъ, да и въ другихъ славянскихъ языкахъ, въ составъ именъ числительныхъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, входятъ слова, означающія числа отъ одного до девяти включительно, и во всѣхъ именахъ повторяющійся предлогъ „на“. Это облегчаетъ дѣло счета. Но при усвоеніи этихъ числительныхъ именъ ученикъ на первыхъ порахъ вовсе не обязанъ непремѣнно разбивать каждое изъ соотвѣтствующихъ даннымъ словамъ чиселъ на одинъ десятокъ и столько-то единицъ. Это знаніе можетъ явиться результатомъ дальнѣйшихъ занятій его. За-то необходимо, чтобы учащійся безусловно вѣрно примѣнялъ слова: „одиннадцать“, „двѣнадцать“ и т. д. до слова „девятнадцать“ включительно.

Упражненія въ счетѣ. Чисто-словесное знаніе числительныхъ именъ, конечно, недостаточно для дальнѣйшаго прохожденія курса ариѳметики. Но оно уже сильно облегчаетъ учителю переходъ отъ счета исключительно словеснаго, отъ болѣе или менѣе безсмысленнаго произнесенія дѣтьми числительныхъ именъ въ извѣстномъ порядкѣ, къ счету вполнѣ сознательному. Въ раннемъ дѣтствѣ человѣкъ научается произносить слова, не понимая первоначально ихъ значенія. Только впослѣдствіи онъ постепенно научается связывать съ каждымъ словомъ болѣе или менѣе ясное представленіе. То же справедливо и относительно числительныхъ именъ. — Поэтому учащій, убѣдившись въ томъ, что дѣти обладаютъ умѣніемъ „механически“ считать, этимъ долженъ непремѣнно пользоваться для того, чтобы пріучить ихъ къ связыванію извѣстныхъ имъ словъ съ представленіями сознательнаго счета. Если же дѣти не знакомы даже и съ механическимъ счетомъ, то ихъ надо научить уже прямо счету сознательному, сначала въ указанныхъ выше предѣлахъ. Въ обоихъ случаяхъ при обученіи сознательному счету обязательно должно пользоваться наглядными пособіями: кубиками, спичками, другими предметами и болѣе или менѣе простыми значками, изображаемыми учителемъ на классной доскѣ, и дѣтьми въ тетрадяхъ или на грифельныхъ доскахъ.

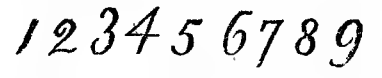
Порядокъ упражненій Порядокъ упражненій въ устномъ счетѣ можетъ быть слѣдующій: упражненія въ одиночномъ (поочередно каждымъ изъ учащихся, безъ прямого участія остальныхъ), упражненія въ такъ называемомъ обратномъ счетѣ и упражненія въ хоровомъ счетѣ предметовъ, отбираемыхъ учителемъ. Относительно обратнаго счета должно замѣтить, что это—

прежде всего вовсе не счетъ и что онъ сводится лишь къ называнію числительныхъ именъ, начиная съ даннаго изъ нихъ, въ порядкѣ обратномъ естественному. Это упражненіе и не принадлежитъ къ числу необходимѣйшихъ.

Самостоят. упражненія. Въ качествѣ самостоятельныхъ упражненій, на этой ступени обученія можетъ служить только изображеніе числовыхъ фигуръ отъ одного до десяти включительно, въ порядкѣ прямого и т. наз. обратнаго счета. Въ № 1 „Задачника для учителей“ (вып. I) приведены образцы работы учениковъ подъ руководствомъ учителя, а въ № 2 „Задачника для учениковъ“ (вып. I) даны образцы самостоятельныхъ упражненій, которыя сначала должны быть копируемы учащимися, а впослѣдствіи, если это окажется нужнымъ и цѣлесообразнымъ, изображаемы на-память. Ниже упоминаются только первые выпуски „Ариѳметическаго задачника для учителей“ и „Ариѳметическаго задачника для учениковъ“. Нумерація задачъ этихъ двухъ книжекъ, для удобства, устроена такъ, что нумера, недостающіе въ одной изъ нихъ, помѣщены въ другой. Рекомендовать, въ качествѣ самостоятельнаго упражненія, изображеніе дѣтьми числовыхъ фигуръ съ большимъ, чѣмъ десять, количествомъ значковъ нельзя, такъ какъ эти упражненія лишены наглядности, а потому врядъ ли нужны и, притомъ, отличаются чрезвычайною громоздкостью. Скорѣе такое упражненіе, если оно вообще умѣстно, то только при непосредственномъ участіи учащаго. Во всякомъ случаѣ, цѣль указанныхъ выше упражненій—исключительно твердое усвоеніе дѣтьми самаго дѣйствія, самаго процесса счета.

Неумѣстность на этой ступени задачъ съ условіями. Что касается упражненія дѣтей въ счетѣ на задачахъ съ условіями, то его рекомендовать нельзя, такъ какъ это—упражненіе въ сложеніи чиселъ, а не въ счетѣ предметовъ. Сложеніе же есть ариѳметическое дѣйствіе, съ которымъ дѣти ознакомятся только впослѣдствіи, и притомъ — въ свое время. Учитель долженъ упражнять дѣтей, на занимающей насъ (1-й) ступени, только въ счетѣ, стараясь, по возможности, разнообразить эти упражненія. Должно замѣтить, что вводить задачи, разсказъ, въ эти упражненія не слѣдуетъ еще и потому, что практическая жизнь предлагаетъ задачи непосредственнаго счета вовсе не въ повѣствовательной формѣ. Естественность и простота—вотъ тѣ требованія, которыхъ не имѣетъ права забывать учитель на всѣхъ ступеняхъ обученія, а поэтому и на первой ступени, т. е. при упражненіяхъ дѣтей въ счетѣ. Хорошо, при счетѣ въ области второго десятка, класть десять палочекъ на столъ рядышкомъ, а на нихъ класть поперекъ остальныя, произнося пояснѣе первую часть словъ: одиннадцать, двѣнадцать и т. д.

2-ая ступень: цифры. § 3. Когда устный счетъ дѣтьми болѣе или менѣе основательно усвоенъ, учитель можетъ приступить къ ознакомленію ихъ съ такъ называемыми арабскими цифрами. Это—вторая ступень обученія. Многословныхъ разговоровъ о цѣли обозначенія чиселъ цифрами, конечно, вести не слѣдуетъ: дѣти очень легко усваиваютъ себѣ значеніе записи и пользу установленія условнаго знака для обозначенія числа. Опасеніе, что ребенокъ станетъ смѣшивать число съ цифрою, тоже не основательно, если онъ ранѣе упражнялся въ дѣйствительномъ счетѣ предметовъ. Порядокъ ознакомленія съ цифрами можетъ быть избранъ слѣдующій: сначала могутъ быть дѣтямъ показаны три цифры: 1, 2 и 3, и объяснено ихъ условное значеніе, потомъ еще двѣ цифры: 4 и 5, и такъ далѣе до цифры 9 включительно. При этомъ, учитель долженъ упражнять классъ, прежде всего, въ хоровомъ и одиночномъ называніи цифръ, изображаемыхъ учителемъ на доскѣ. Когда такимъ образомъ дѣти научились отличать одну отъ другой первыя три цифры, изображаемыя учителемъ на доскѣ по порядку и въ разбивку, они могутъ перейти уже и къ изображенію цифръ подъ диктовку и подъ непосредственнымъ наблюденіемъ учителя. При этомъ цифру 1 можно изображать въ одинъ пріемъ (безъ тонкой черты), или



въ два такта (сначала тонкую черту снизу вверхъ, а потомъ толстую—сверху внизъ), цифру 2—въ два, а цифру 3—въ два или три такта (третій тактъ приходится на точку, которою можно заканчивать тонкій поворотъ цифры вверхъ). (См. „Задачникъ для уч—лей“, № 3). Убѣдившись въ томъ, что каждый изъ учащихся въ отдѣльности умѣетъ изображать каждую изъ этихъ цифръ, учитель можетъ задать младшему отдѣленію соотвѣтствующее упражненіе (напр., изъ №№ 4—7 „Задачника для уч—ковъ“). Иной порядокъ ознакомленія съ цифрами, обусловливаемый соображеніями чистописанія, конечно, тоже дозволителенъ. Если бы учитель пожелалъ держаться иного порядка, то сначала цѣлесообразнѣе всего было бы научить дѣтей изображенію цифръ 1, 4 и 7, требующихъ только умѣнія проводить прямыя линіи. Лучше въ такомъ случаѣ обратиться сначала къ цифрѣ 4 (такъ какъ цифра 1 можетъ быть принята учениками прямо за палочку, а не за знакъ), потомъ перейти къ цифрѣ 7, и наконецъ —въ цифрѣ 1. Ознакомленіе учащихся съ остальными цифрами и со-

отвѣтствующія самостоятельныя упражненія должны итти въ томъ же порядкѣ, причемъ дѣтей надо пріучить къ изображенію цифры 4 въ три пріема, цифръ 5 и 7—въ три, цифръ 9, 6 и 8—въ два пріема.

Сначала надо научить дѣтей изображать цифры, оставляя между ними промежутокъ въ одну клѣтку, и только впослѣдствіи можно показать возможность изображать ихъ рядомъ. Форма цифръ (такъ называемыхъ старо-англійскихъ) наиболѣе проста, удобна и въ высшей степени опредѣленна. Удобства состоятъ и въ томъ, что цифры лишены всякихъ излишнихъ волнистыхъ линій и украшеній, наиболѣе трудно дающихся малолѣтнимъ. Съ нулемъ знакомить дѣтей на этой ступени не для чего.

Можно рекомендовать также цифры *) слѣдующей формы:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 .

Цифры прямого письма, но того же стиля, имѣютъ слѣдующую форму:

1 2 3 4 5 6 7 8 9.

3-я ступень: прибавленіе единицы и вычитаніе.

§ 4. Ознакомленіе съ обозначеніемъ десятка должно быть отнесено къ числу затруднительнѣйшихъ статей курса. Поэтому лучше перейти отъ цифръ прямо къ простѣйшему случаю сложенія чиселъ, представляемому задачами, требующими несомнѣннаго (даже для ребенка) присоединенія, прибавленія къ данному числу, не большему восьми, одной единицы. Это будетъ третья ступень, дающая возможность предложить ученикамъ и самостоятельныя работы. Объ „увеличеніи“ даннаго числа на одну единицу не можетъ быть рѣчи въ такихъ задачахъ. Ихъ словесное содержаніе въ общемъ видѣ не должно выходить за рамки слѣдующей задачи: „дано 5 предметовъ; присоединенъ еще одинъ; сколько получилось?“ Было бы однакоже ошибочно считать задачу этого рода задачею на счетъ. Она, конечно, можетъ быть рѣшена помощью счета, и дѣти будутъ и имѣютъ право ее рѣшать такимъ именно образомъ. Но въ очень скоромъ времени они сами оставляютъ этотъ пріемъ и прибѣгаютъ къ присчитыванію. Пусть предложена задача: „Вотъ лежатъ три спички; вотъ еще одна; сколько здѣсь всего спичекъ?“ Только очень неразвитой ребенокъ семи-восьми лѣтъ начнетъ счетъ съ начала, съ единицы. Большинство же дѣтей этого возраста очень скоро научится отвѣчать: „четыре“, т. е. предпочтетъ присчитываніе и такимъ образомъ, самъ того не сознавая, произведетъ сложеніе, опустивъ процессъ счета, результатомъ котораго тоже можетъ явиться данное число. Есть глубокая разница между требованіемъ—„сосчитать—сколько здѣсь всего предметовъ“ и требованіемъ, которое выражается задачею, подобною вышеприведенной, такъ какъ въ послѣдней даны уже извѣстныя числа. Лучше всего задачи этого рода предлагать сначала на наглядныхъ пособіяхъ. (Но если бы учащій захотѣлъ повести эти упражненія непремѣнно съ условіями, то онъ таковыя найдетъ въ № 8 „Задачника для уч—лей“.)

*) Сторонникамъ прямого письма можно рекомендовать тотъ порядокъ цифръ, который принятъ составителемъ этой книги и практиковался также во временныхъ школахъ при многочисленныхъ педагогическихъ курсахъ, коими онъ въ разное время руководилъ, и который удостоился сочувствія участниковъ курса: 4, 7, 1, 5, 3, 6, 9, 8 и 2.

На этой же, третьей, ступени курса вполнѣ умѣстно ознакомленіе дѣтей со знакомъ сложенія, причемъ учитель долженъ имъ выяснить, что если дано число, напр. 4, и еще одна единица, и требуется узнать—сколько у насъ всего единицъ, то это записываютъ такъ: $4 + 1$, а написанное можно прочесть такъ: „четыре да одинъ“. Въ то же время умѣстно ознакомить дѣтей со знакомъ равенства, который отдѣляетъ запись отъ записи числа, получаемаго въ концѣ концовъ. Должно выяснить смыслъ записей: $4 + 1 = 5$, $5 + 1 = 6$ и т. подобныхъ. Равнымъ образомъ должно научить дѣтей читать подобныя записи такъ: „четыре да еще одинъ будетъ (или же „все равно что“, или „получится“) пять“. (Когда дѣти себѣ усвоили эти два знака, имъ можно предложить упражненія изъ № 9 „Задачника для уч—ковъ“.)

Знакъ сложенія.

Неумѣстность перемѣщенія слагаемыхъ

Должно замѣтить, что на этой ступени было бы преждевременно выясненіе ученикамъ, что

$$5 + 1 = 1 + 5;\ 3 + 1 = 1 + 3,\ \text{и т. д.},$$

такъ какъ прибавленіе нѣсколькихъ единицъ, хотя бы даже и къ единицѣ, для дѣтей на этой ступени обученія представляетъ уже

нѣкоторыя, не соотвѣтствующія ихъ развитію, трудности. Поэтому умѣстнѣе, для внесенія разнообразія въ самостоятельныя занятія дѣтей, ознакомить послѣднихъ съ простѣйшимъ случаемъ вычитанія, а именно съ вычитаніемъ одной единицы изъ однозначнаго числа. При этомъ, задачи должны быть сначала задаваемы на наглядныхъ пособіяхъ; можно ввести также и задачи повѣствовательныя съ двумя условіями. Но должно при этомъ помнить, что на этой ступени умѣстны только задачи простѣйшаго типа: „было столько-то единицъ; отнята, отдѣлена, удалена одна единица; сколько осталось?“ (Задачи этого рода приведены въ № 10 „Задачника для учителей“.) Тутъ же умѣстно ознакомленіе съ знакомъ вычитанія и со способомъ чтенія записи $4 - 1 = 3$. Лучше всего читать ее такъ: „четыре безъ одного будетъ три“ или же: „четыре безъ одного все равно, что три“. (Матеріалъ для самостоятельныхъ работъ данъ въ № 11 „Задачника для уч—ковъ“.) Слова „плюсъ“ и „минусъ“, взятыя изъ латинскаго языка, на этихъ ступеняхъ, да и вообще раньше третьяго года, не умѣстны.

4-ая ступень: числа 2-го десятка.

§ 5. Ознакомивъ дѣтей съ указанными выше простѣйшими случаями сложенія и вычитанія, учащій можетъ перейти къ обозначенію чиселъ, большихъ девяти, помощью цифръ (это — четвертая ступень). Цифра нуль, а главное—ея роль при обозначеніи чиселъ, должны на первыхъ порахъ совершенно отсутствовать. При этомъ, прежде всего, придется предварительно разработать изустно сложенія: десять да одинъ, десять да два и т. д. до суммы десять да десять. Затѣмъ учащій долженъ выработать въ умѣ дѣтей представленіе о десяткѣ и научить ихъ такимъ сложеніямъ: десятокъ шишекъ да одна шишка, десятокъ яблокъ да два яблока, десятокъ кубиковъ да три кубика и т. д. до девятнадцати включительно. Это послужитъ укрѣпленію въ дѣтяхъ навыка въ сознательномъ счетѣ. Затѣмъ надо научить разложенію каждаго изъ чиселъ этой области на десятокъ и нѣсколько единицъ. Но выработка представленія о десяткѣ принадлежитъ къ числу задачъ довольно трудныхъ. Дѣло въ томъ, что десять единицъ и десятокъ — одно и то же съ точки зрѣнія величины, но не съ точки зрѣнія логической. Для того, чтобы выработать это представленіе, полезно взять десять кубиковъ въ безпорядкѣ, а потомъ тѣ же десять кубиковъ сложить въ рядъ или въ столбецъ, десять спичекъ

взять отдѣльно, и тѣ же десять связать въ пучекъ, десять кружковъ нарисовать въ безпорядкѣ, а другіе десять кружковъ нарисовать въ видѣ карточной фигуры. При этихъ упражненіяхъ слѣдуетъ добиваться (и возможно добиться) того, чтобы дѣти уяснили себѣ сами ту разницу между десяткомъ и десятью единицами, на которую легко указать, но которую учителю трудно имъ выяснить. Для этой цѣли, хотя бы дѣти не умѣли считать далѣе двадцати, полезно взять нѣсколько десятковъ (пучковъ) „спичекъ“, и показать дѣтямъ, что они знаютъ, сколько здѣсь десятковъ спичекъ, хотя и не могутъ сразу сказать, сколько отдѣльныхъ спичекъ во всѣхъ пучкахъ. Тогда дѣти поймутъ, что десятокъ представляетъ собою не только десять отдѣльныхъ предметовъ, но группу въ десять предметовъ.

Составъ чиселъ 2-го десятка.

Если все это сдѣлано и знаніе этого счета усвоено дѣтьми какъ слѣдуетъ, то, съ помощью наглядныхъ пособій и пользуясь этимологическимъ составомъ числительныхъ именъ занимающей насъ области чиселъ, возможно въ какихъ-нибудь два, три пріема научить дѣтей устному разложенію чиселъ этой области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ. Когда это сдѣлано, дѣтямъ должно быть показано, что для обозначенія различныхъ чиселъ придумывать все новые и новые знаки, все новыя цифры, было бы прежде всего неудобно. Цифръ въ такомъ случаѣ скоро набралось бы слишкомъ много. Оставляя въ сторонѣ до-поры-до-времени цифру нуль, учитель долженъ привести дѣтей къ сознанію, что они не умѣютъ однимъ знакомъ обозначить десять единицъ. Когда они вполнѣ сознаютъ свое неумѣніе, онъ, обративъ и часто обращая ихъ вниманіе на то, что число десять онъ умышленно пропускаетъ, долженъ научить ихъ помощью цифръ обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно. При этомъ онъ неутомимо выясняетъ на примѣрахъ и упражненіяхъ то правило, по которому цифра десятковъ пишется ранѣе цифры единицъ. Еще лучше сначала не трогать даже одиннадцати, такъ какъ здѣсь соединены для начинающаго двѣ трудности: обѣ цифры одинаковы, и которая изъ нихъ обозначаетъ десятокъ, ему и запомнить, и даже замѣтить трудно. Къ одиннадцати же можно перейти уже тогда, когда ученикъ привыкъ записывать раньше всего десятокъ, а потомъ число отдѣльныхъ единицъ. Неудобно и обозначеніе числа 12, потому что въ немъ порядокъ цифръ совпадаетъ съ ихъ обычнымъ порядкомъ. Лучше начать съ 13-ти или другого числа.

Эта ступень курса преодолѣвается дѣтьми не особенно быстро, но при нѣкоторой настойчивости вскорѣ благіе результаты непремѣнно будутъ достигнуты.

Введеніе нуля. Наконецъ, когда дѣти научились безошибочно обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, тогда можно перейти къ цифрѣ нуль, къ обозначенію—сначала одного десятка и десяти единицъ, а потомъ и двухъ десятковъ или двадцати, съ помощью этой, крайне важной цифры. — Только такимъ образомъ у учащихся развивается привычка разлагать число сказанной области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ и смотрѣть на число, большее десяти, съ точки зрѣнія десятичной системы. Привычка эта въ высшей степени важна, какъ въ развивательномъ отношеніи, такъ и для будущихъ занятій дѣтей ариѳметикою. (Въ №№ 12, 13 и 14 „Задачника для учителей“ приведены въ указанномъ порядкѣ упомянутыя упражненія этой ступени.) Въ числѣ упражненій на сложеніе, въ которыхъ второе слагаемое равно единицѣ, появляются и такія, въ которыя входитъ также и крайне важное число десять.

Какихъ не надо упражненій? Упражненія въ разложеніи чиселъ занимающей насъ области на сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти, и въ сложеніи двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти, могутъ быть только изустными, но не письменными. На этой (4-й) ступени не вполнѣ умѣстны, какъ упражненія въ вычитаніи однозначнаго числа письменныя упражненія вида:

$$14 = 10 + 4, \quad 15 = 10 + 5, \text{ и т. д.,}$$

и вида: $10 + 4 = 14, \quad 10 + 5 = 15$ и т. д.

Но за-то тѣмъ умѣстнѣе здѣсь упражненія вида:

$$10 + 1 = 11, \quad 11 + 1 = 12 \text{ и т. д.}$$

и вида: $11 - 1 = 10, \quad 12 - 1 = 11$ и т. д.

Какія умѣстны? Упражненія этого послѣдняго рода и даны въ № 15 „Задачника для учителей“ и № 16 „Задачника для учениковъ“. Въ этомъ послѣднемъ нумерѣ начинается дѣло съ упражненій такого вида: $2 + 1, 12 + 1, 3 + 1, 13 + 1$ и т. д., дабы ученики дѣйствительно собственнымъ умомъ добрались до секрета этихъ сложеній и вычитаній. На эти послѣднія упражненія, впрочемъ, отнюдь не слѣдуетъ смотрѣть какъ на упражненія въ письменномъ производствѣ дѣйствій сложенія и вычитанія, а скорѣе какъ на работы, преслѣдующія лучшее усвоеніе нумераціи чиселъ первыхъ двухъ десятковъ. Прежде чѣмъ задать дѣтямъ самостоятельныя упражненія, начиная съ № 17, должно выяснить уже легкое для нихъ обозначеніе «двадцати» помощью цифръ.

Письменное-ли это производство дѣйствія? Было бы ошибочно думать, что упражненія въ сложеніи цѣлаго десятка съ одною единицею и въ вычитаніи одной единицы изъ числа, большаго десяти и меньшаго двадцати, являются на этой ступени курса преждевременными. Знаніе правилъ письменнаго сложенія и вычитанія вовсе не нужно для сложенія одного десятка съ единицею и для вычитанія одной единицы изъ даннаго числа. Для этихъ дѣйствій достаточно, если учащійся умѣетъ считать, понимаетъ нумерацію и ясно понялъ сложеніе и вычитаніе, когда второе слагаемое и вычитаемое равны единицѣ. Надо строго различать запись дѣйствія и результата его отъ письменнаго производства дѣйствія. Если кто записалъ, что $21+33=54$, то это еще не значитъ, что онъ письменно произвелъ дѣйствіе, ибо онъ только записалъ дѣйствіе и его результатъ. Произвести же дѣйствіе письменно значитъ не только его записать, но и поступить по правилу письменнаго производства. Самое существованіе записи $2+1=3$ тоже нельзя считать доказательствомъ письменнаго производства дѣйствія, о которомъ въ этомъ случаѣ къ тому же не можетъ быть и рѣчи. Эта запись—только замѣна словъ „два да одинъ будетъ три“ и съ письменнымъ производствомъ дѣйствія не имѣетъ ничего общаго.

5-ая ступень: сумма не больше десяти. § 6. По усвоеніи дѣтьми выше намѣченныхъ умѣній, можно приступить къ уразумѣнію ими сложенія всякихъ двухъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ не больше десяти (пятая ступень). До сихъ поръ дѣти прибавляли къ числу одну единицу; на этой (пятой) ступени обученія надо ихъ пріучить къ мысли, что есть случаи, когда требуется прибавить и больше одной единицы. Для этого могутъ быть предложены соотвѣтствующія задачи: сначала на наглядныхъ пособіяхъ, и потомъ — задачи съ условіями, которыя не должны, впрочемъ, выходить за предѣлы простѣйшаго случая сложенія: „дано 5 единицъ, прибавлены, присоединены еще 3 единицы; сколько послѣ этого получилось всего единицъ?“ Когда дѣти поймутъ смыслъ требованія подобныхъ задачъ и научатся на наглядныхъ пособіяхъ (лучше всего на пальцахъ) присчитывать единицы второго слагаемаго къ первому, они въ состояніи будутъ понять пользу запоминанія наизусть нѣкоторыхъ результатовъ. Къ послѣдовательному упражненію въ этомъ запоминаніи учитель и можетъ въ такомъ случаѣ приступить на своихъ урокахъ съ младшимъ отдѣленіемъ. Но, во всякомъ случаѣ, прежде чѣмъ

перейти къ этимъ упражненіямъ, должно убѣдиться въ томъ, всѣ ли учащіеся вполнѣ поняли, какой смыслъ имѣютъ вопросы: „сколько будетъ три да еще два“, „четыре да ещё два“, „пять да два“, „три да три“, „четыре да три“, и т. д. Только въ случаѣ, если одни самостоятельныя упражненія не научили дѣтей этой части таблицы и если они вполнѣ ясно понимаютъ смыслъ подобныхъ вопросовъ, можно приступить къ усвоенію хоромъ наизусть таблицы сложенія чиселъ, сумма которыхъ не болѣе десяти. (Сюда именно и относятся задачи №№ 17, 18, 19, 20 „Задачника для уч—лей“.) Что же касается задачъ на сложеніе чиселъ, сумма которыхъ равна десяти, то онѣ выдѣлены изъ общей массы задачъ для того, чтобы дѣти могли обратить особенное вниманіе на новую единицу счета, на десятокъ. Онъ играетъ въ нумераціи и въ производствѣ дѣйствій надъ двузначными числами такую роль, какой остальныя числа перваго десятка не играютъ. (Сюда относится большинство упражненій № 20.) Эти упражненія могутъ быть предложены и на наглядныхъ пособіяхъ, и на задачахъ, а также отличаться и отвлеченнымъ характеромъ. [Въ № 17 ученики ознакомляются также съ перемѣною порядка обоихъ слагаемыхъ, въ № 18—съ выраженіемъ „поровну“ и „больше“, въ № 19—со словами: „столько же“ и „по столько“, въ № 20—со словами „получится“, „прибавить“, „присоединить“, „приложить“, „сложить“. Въ качествѣ самостоятельныхъ упражненій могутъ быть предложены изъ „Задачника для уч—ковъ“: № 21 (прибавленіе двухъ), № 22 (прибавленіе трехъ), № 23 (прибавленіе четырехъ), № 24 (прибавленіе остальныхъ чиселъ перваго десятка). Самостоятельныя работы должны служить для укрѣпленія учениковъ въ знаніи занимающей насъ таблицы сложенія, — въ знаніи, которое они должны постигнуть подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя. На этой же ступени (№№ 25 „Задачника для уч—лей“ и 26 „Задачника для уч—ковъ“) ученики упражняются также въ сложеніи нѣск. однозначныхъ слагаемыхъ].

6-ая ступень: вычитаніе однозначнаго числа.

§ 7. Далѣе дѣти должны понять необходимость вычитанія одного однозначнаго числа изъ другого (шестая ступень). Для этой цѣли нужны (№ 27 „Задачника для уч—лей“) соотвѣтствующія упражненія на наглядныхъ пособіяхъ, и послѣ этихъ упражненій—другія, цѣль которыхъ — выясненіе необходимости дѣйствія вычитанія при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ. Условія задачъ и

упражненій этого рода не должны выходить за предѣлы простѣйшаго требованія: „отдѣлить нѣсколько единицъ отъ даннаго числа ихъ“. Распространеніе понятія о вычитаніи одной единицы изъ даннаго числа ихъ на случай, когда требуется изъ числа вычесть болѣе одной единицы, для учащихся не представляетъ особенныхъ трудностей. Однако же, было бы преждевременно (на этой, шестой, ступени обученія) напирать на связь вычитанія со сложеніемъ: это можетъ быть сдѣлано только впослѣдствіи (во второй годъ обученія). Но этимъ не исключается польза соотвѣтствующихъ самостоятельныхъ упражненій (подъ № 28 „Задачника для уч—ковъ“), въ коихъ эта связь проявляется довольно замѣтнымъ образомъ. Преждевременнымъ точное формулированіе сказанной связи вычитанія со сложеніемъ на этой ступени надо признать потому, что семи или восьмилѣтнія дѣти съ большимъ трудомъ уясняютъ себѣ, что задачи такого вида: „сколько надо прибавить единицъ къ 5, чтобы получить 7“ и „къ какому числу надо прибавить 2, чтобы получить 9“ ведутъ къ вычитанію одного числа изъ другого, а не къ сложенію. Самостоятельныя же упражненія (подъ № 29) могутъ быть исполнены на основаніи однѣхъ только догадокъ, вполнѣ отвѣчающихъ сущности обоихъ дѣйствій и ихъ истинной связи. Эти упражненія полезны также для внесенія большаго разнообразія въ занятія дѣтей. Но надо твердо помнить, что ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ задавать вопросовъ на сравненіе двухъ чиселъ въ разностномъ отношеніи, вродѣ, напр., слѣдующаго: „на сколько здѣсь, на столѣ, болѣе предметовъ, чѣмъ на стулѣ?“ Задача на наглядныхъ пособіяхъ должна на этой ступени гласить такъ: „вотъ шесть кубиковъ; отдѣли, отними, отодвинь, откинь два изъ нихъ; сколько осталось?“ Дѣти сначала рѣшаютъ эти задачи помощью сосчитыванія оставшихся предметовъ, и этому не слѣдуетъ препятствовать. Не слѣдуетъ препятствовать и рѣшенію дѣтьми задачъ этого рода на пальцахъ. Даже наоборотъ: если дѣти къ пальцамъ не обращаются, но, еще не обладая этимъ средствомъ вычисленія небольшихъ результатовъ, затрудняются въ отсчитываніи въ умѣ, то ихъ слѣдуетъ научить употребленію пальцевъ съ этою цѣлью. Это—одна изъ необходимыхъ ступеней развитія въ нихъ интереса къ вычисленію и умѣнія вычислять въ умѣ. Задачи, допускающія примѣненіе наглядныхъ пособій, должны быть рѣшаемы на самомъ дѣлѣ съ помощью этихъ пособій.

Таблица вычитанія.

Усвоеніе дѣтьми таблицы вычитанія наизусть должно вестись методически-послѣдовательно, начи-

ная съ случая вычитанія, когда вычитаемое равно единицѣ, и переходя постепенно къ случаямъ вычитанія, когда вычитаемое равно двумъ, тремъ и т. д. Уменьшаемое на этой, шестой, ступени, конечно, не должно быть болѣе десяти. Но приступать къ усвоенію наизусть этой части таблицы вычитанія слѣдуетъ только въ томъ случаѣ, когда дѣти вполнѣ понимаютъ не только цѣль дѣйствія вычитанія, но также необходимость и пользу запоминанія результатовъ вычитанія однихъ чиселъ изъ другихъ. Въ противномъ случаѣ заучиваніе, хотя бы даже и хоровое (каковое заучиваніе менѣе утомляетъ учениковъ), этой части таблицы вычитанія будетъ въ нѣкоторомъ смыслѣ насиліемъ надъ дѣтскою природою. На этой же ступени (№№ 28 „Задачника для учителей“ и 29 „Задачника для учениковъ“) можетъ быть усвоено послѣдовательное производство сложенія и вычитанія, не выходящее за предѣлы шестой ступени.

7-ая и 8-ая ступени: сумма и уменьшаемое болѣе десяти.

§ 8. Прежде чѣмъ перейти къ сложенію чиселъ, сумма которыхъ больше десяти, должно вернуться къ сложенію одного десятка съ нѣсколькими единицами, не составляющими десятка, и къ разложенію чиселъ, отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, на сумму одного десятка съ нѣкоторымъ однозначнымъ числомъ единицъ (№№ 30 и 32 „Задачника для уч—лей“ и 31—33 „Задачника для уч—ковъ“). Это—седьмая ступень обученія. На слѣдующей, восьмой, можно приступить къ сложенію двухъ однозначныхъ чиселъ, дающему въ суммѣ болѣе десяти, а также къ сложенію двузначнаго числа, меньшаго двадцати, съ однозначнымъ, дающему въ суммѣ также менѣе двадцати. Прежде всего должно убѣдить дѣтей, что сложеніе такихъ чиселъ иногда требуется. Съ дѣтьми это должно проработать сначала на наглядныхъ пособіяхъ, потомъ, на задачахъ (изъ „Задачника для уч—лей“, содержаніе № 34). Когда они убѣдились въ возможности такихъ задачъ и поняли смыслъ ихъ, они поймутъ, во-1-хъ, что самая сущность процесса сложенія въ этомъ случаѣ состоитъ въ томъ, что сумма однихъ слагаемыхъ, напр., 6 и 7, сводится къ суммѣ другихъ: 10 и 3, и во-2-хъ, что запомнить наизусть суммы, происходящія отъ сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ, не только полезно, но почти необходимо.

Способъ составленія суммы.

Сущность процесса сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ больше десяти, какъ выше замѣчено, состоитъ въ томъ, что каждая такая сумма двухъ слагаемыхъ замѣняется суммою другихъ двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно равно десяти. Такъ, напр., если дано сложить 7 и 8, то, отдѣливъ отъ 8-ми единицъ три и прибавивъ къ 7-ми эти три единицы, мы получимъ 10, а присоединивъ къ этой суммѣ остальныя пять единицъ изъ числа восьми единицъ второго слагаемаго, мы получимъ 10 + 5 или 15. Дѣти должны вполнѣ овладѣть этимъ пріемомъ, прежде чѣмъ перейти къ усвоенію наизусть, подъ руководствомъ учителя, остальной, имъ еще неизвѣстной, части таблицы сложенія. Способъ сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ, дающаго въ суммѣ болѣе десяти, зависитъ большею частью отъ того, что десятокъ и легко составить, и легко сложить съ однозначнымъ числомъ. Но часто замѣчается, что дѣти легко складываютъ одинаковыя числа (6 да 6, 7 да 7 и т. д.) и прибѣгаютъ, гдѣ это можно сдѣлать, къ этому сложенію. Напр., 8 да 7 они отыскиваютъ такъ: 8 да 8—шестнадцать, долой 1, пятнадцать. Этому не только не надо препятствовать, но можно сочувствовать. Но необходимо все-таки добиться также того, чтобы дѣти составляли сознательно десятокъ.

Составленіе десятковъ при вычитаніи.

Способъ вычитанія однозначнаго числа изъ двузначнаго, при которомъ получается однозначный остатокъ (12—5), основанъ на томъ, что десятокъ очень легко составить и что изъ десятка вычесть тоже не трудно. (Вычитанію посвящены: №№ 36 — 37 „Задачника для уч—лей“ и № 37а „Задачника для уч-ковъ“). Все дѣло только въ томъ, чтобы ученикъ предварительно научился обоимъ этимъ случаямъ вычитанія (для чего и служатъ, между прочимъ, первыя 42 упражненія № 37а).

Сумма и разность меньше 20-ти

Необходимо замѣтить, что упражненія въ такомъ сложеніи числа, большаго десяти и меньшаго двадцати, съ однозначнымъ числомъ, которое (сложеніе) даетъ въ суммѣ число, меньшее двадцати, не преждевременны на этой, восьмой, ступени обученія. Они также могутъ быть разсматриваемы съ точки зрѣнія примѣненія къ нимъ общаго правила сложенія многозначныхъ чиселъ, но это дѣла не измѣняетъ. Въ такой же мѣрѣ нельзя считать преждевременными изустныя упражненія въ вычитаніи изъ двузначнаго числа, меньшаго двадцати, всякаго однозначнаго числа. Откладывать же сознательное сложеніе и вычитаніе въ этихъ случаяхъ (12+3 или 19—2 и т. п.) до ознакомленія дѣтей съ правилами письменнаго производства этихъ дѣйствій прямо невозможно. Это было бы ни съ чѣмъ не сообразно.

9-ая ступень: понятіе объ умноженіи и о части.

§ 9. На слѣдующей ступени обученія было бы вполнѣ естественно перейти къ дальнѣйшему изученію нумераціи чиселъ, большихъ двадцати, и къ производству дѣйствій сложенія и вычитанія надъ подобными числами. Но такимъ образомъ въ обученіе ариѳметикѣ было бы внесено чрезвычайное и весьма вредное въ педагогическомъ отношеніи однообразіе. Во избѣжаніе этого, на девятой ступени курса надо ввести что-либо новое, и таковымъ являются: обозначеніе умноженія, а также представленія о простѣйшихъ дробяхъ. Но прежде, чѣмъ перейти къ умноженію, дѣти должны усвоить себѣ возможность и самый смыслъ сложенія нѣсколькихъ цѣлыхъ чиселъ. Ибо умноженіе является на первыхъ порахъ только частнымъ случаемъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ, — частнымъ случаемъ, въ которомъ мы, вмѣсто двухъ или нѣсколькихъ одинаковыхъ слагаемыхъ, записываемъ только, какъ велико каждое слагаемое и сколько ихъ счетомъ. Итакъ, въ виду чисто-педагогическихъ соображеній, на этой ступени обученія умѣстно введеніе въ курсъ, прежде всего, сложенія нѣсколькихъ слагаемыхъ и умноженія такихъ чиселъ, произведеніе которыхъ сначала не болѣе 20-ти. Полезно также (для будущаго) введеніе первоначальнаго представленія о дробяхъ, —притомъ, конечно, вполнѣ независимо отъ дѣленія чиселъ.

Сложеніе нѣск. чиселъ.

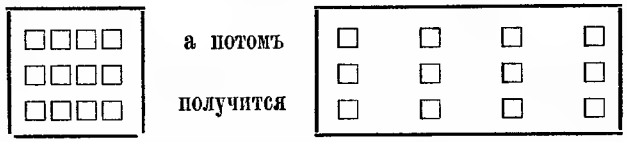
Займемся прежде всего вопросами сложенія нѣсколькихъ, вообще не равныхъ, слагаемыхъ. Необходимость этого дѣйствія дѣти могутъ уяснить себѣ при помощи наглядныхъ пособій и приличныхъ задачъ съ условіями. Прежде всего они должны себѣ уяснить смыслъ вопросовъ, требующихъ сложенія нѣсколькихъ слагаемыхъ. Когда это достигнуто, они должны уяснить себѣ, что для производства дѣйствія можно первое слагаемое сложить со вторымъ, а полученную сумму — съ третьимъ, и т. д. (Сюда относятся № 38 „Задачника для учителей“ и № 39 „Задачника для учениковъ“). Далѣе ученики (№№ 40 и 41) встрѣчаются со случаемъ сложенія одинаковыхъ слагаемыхъ и съ умноженіемъ, какъ частнымъ случаемъ сложенія, и съ записью умноженія, какъ съ сокращенною записью сложенія. Выше подчеркнуты слова „частнымъ“ и „сокращенною“ для того, чтобы этимъ указать, что не самое дѣйствіе умноженія есть сокращенное (какъ это нѣкоторые утверждаютъ) сложеніе, а что только запись $5+5+5+5$ замѣняется болѣе короткою записью 5×4 и что для возникновенія понятія объ умноженіи недостаточно одного лишь равенства слагаемыхъ.

Для этого необходимо еще и существованіе таблицы умноженія.—Засимъ должно пріучить дѣтей къ записыванію слагаемаго ранѣе всего, потомъ—знака умноженія, и наконецъ—числа равныхъ слагаемыхъ. Запись $5 \times 4 =$ учениками должна быть сначала читаема: „пять да пять, да еще пять, да еще пять, будетъ“, затѣмъ такъ: „пять да пять, да пять, да пять, будетъ“, далѣе: „четыре раза по пяти будетъ“, потомъ—„четырежды пять будетъ“ и, наконецъ: „пять, умноженное на четыре, будетъ“. Должно строго соблюдать, чтобы дѣти пріучались число, записанное ранѣе знака умноженія, всегда принимать за множимое, а число, обозначенное послѣ знака—за множителя, но отнюдь не обратно. Поэтому записи: 2×3, 2×4, 2×5 и т. д. должно читать не „дважды три“, „дважды четыре“, „дважды пять“, а непремѣнно такъ: „трижды два“, или „четырежды два“, „два, помноженное на три“, „два, помноженное на четыре“ и т. д.

Дважды, трижды, и т. д. и перемѣна порядка сомножителей.

Съ рѣченіями „дважды“, „трижды“, „четырежды“, „пятью“, „шестью“, „семью“ и т. д. дѣти должны быть ознакомлены не сразу, причемъ они должны значеніе этихъ рѣченій усвоить себѣ вполнѣ точно. Лучше, если дѣти вначалѣ говорятъ такъ: „два раза по два“, „два раза по три“, „три раза по три“, и т. д. Ихъ должно пріучить обозначать, помощью цифръ, рѣченія „пятью-два“, „пятью-три“ и т. п. слѣдующимъ образомъ: 2×5, 3×5 и т. д. Должно замѣтить также, что, ранѣе чѣмъ приступить къ усвоенію наизусть таблицы умноженія чиселъ, произведенія которыхъ менѣе двадцати, учащіеся должны убѣдиться въ пользѣ и необходимости знанія этой таблицы при разрѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ. (Задачи подъ № 40 „Задачника для уч—лей“ служатъ также и для этой цѣли.) Въ условіи задачъ и упражненій, прорабатываемыхъ учениками при непосредственной помощи учителя, на этой ступени не должно входить „увеличеніе“ числа въ нѣсколько разъ.—Особеннаго вниманія заслуживаетъ здѣсь также перемѣна порядка сомножителей, которая должна быть поставлена на почву наглядныхъ пособій: шведскихъ счетовъ, кубиковъ, Пиѳагоровой таблицы и спичекъ. При употребленіи первыхъ трехъ пособій надо сначала принимать за множимое горизонтальный рядъ, а число рядовъ — за множителя, съ тѣмъ чтобы потомъ принять вертикальный рядъ за множимое, а число ихъ—за множителя. Ученики должны движеніемъ правой руки показывать ряды, которые

они имѣютъ въ виду, и столбцы, къ которымъ они переходятъ: работа мышечнаго чувства здѣсь очень полезна. При употребленіи спичекъ, надо отнять отъ каждой кучки по одной спичкѣ и составить новыя кучки.—Особенно быстро къ цѣли приводятъ кубики или шведскіе счеты. Надо, чтобы не только учитель, но и ученики, аккуратно положили въ горизонтальный рядъ, близко одинъ къ другому, — четыре кубика (шарика), подъ ними — на большемъ разстояніи, чѣмъ на какомъ находятся эти кубики (шарики) одинъ отъ другого,—еще четыре, а подъ этими—еще четыре; послѣ этого имъ надо сдвинуть первые три кубика (шарика) этихъ рядовъ, слѣдующіе три и т. д., а потомъ—полученные столбцы раздвинуть. Стало-быть, сначала будетъ:

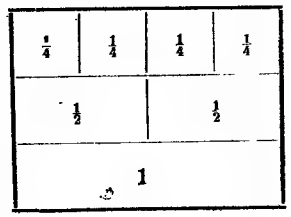


Первая изъ этихъ фигуръ даетъ весьма наглядное представленіе о произведеніи 4×3, вторая же—о произведеніи 3×4. Надо при этомъ замѣтить, что къ неизмѣняемости произведенія двухъ сомножителей приходится много разъ, въ теченіе курса, возвращаться, и почти всякій разъ надо исходить изъ наглядныхъ пособій. Безъ знанія этого свойства произведенія, вычисленія такихъ произведеній, какъ девятью-два или шестью-три, лишаютъ учениковъ должной настойчивости, и ихъ занятія—интереса.

Дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$.

Прежде, чѣмъ перейти къ нумераціи числъ, большихъ двадцати,—необходимой для дальнѣйшаго усвоенія дѣтьми дѣйствія сложенія чиселъ и для усвоенія ими таблицы умноженія во всемъ ея объемѣ,—полезно ознакомить дѣтей съ дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Это ознакомленіе должно носить чисто-наглядный, если возможно, даже осязательный характеръ. Цѣль этого ознакомленія троякая: 1) оно вноситъ большое разнообразіе въ занятія, 2) оно подготовляетъ учениковъ къ воспріятію ясныхъ представленій о части, о цѣломъ, о долѣ и вообще о дѣленіи величины на одинаковыя части, 3) оно даетъ малолѣтнему ясное представленіе о частяхъ, наичаще встрѣчающихся въ жизни. Не нужно думать, что это нарушаетъ „систему“: дѣти учатся очень многому весьма хорошо, хотя и не всегда систематически.—Порядокъ упражненій (№№ 44 и 45 „Задачника для учителей“) состоитъ

въ слѣдующемъ: листъ бумаги, яблоко и т. п., дѣлится сначала пополамъ, а потомъ и на четыре одинаковыя части. То же можетъ быть продѣлано и надъ лентою бумаги длиною въ одинъ аршинъ.—На этой же ступени можно научить дѣтей обозначенію дробей, начавъ съ дроби $\frac{3}{4}$, такъ какъ здѣсь очевиднѣе, чѣмъ въ половинѣ и четверти, проявляются значенія числителя и знаменателя (каковыя названія, впрочемъ, не должны быть сообщаемы ученикамъ). Во главу самостоятельныхъ упражненій, сюда относящихся, можно поставить (№ 46 „Задачника для уч—ковъ“) чертежъ, который можетъ оказать ученику большую услугу, если этого послѣдняго научить—какъ чертежомъ пользоваться, т. е. научить его смотрѣть и видѣть, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ и т. д. Дробь ученики должны записывать съ помощью прямой (горизонтальной), а не косой, наклонной черты, такъ какъ послѣдняя можетъ подать поводы къ недоразумѣнію (ее можно смѣшать съ единицей, $1\frac{1}{2}$ можно принять, при неаккуратномъ письмѣ, за $\frac{11}{2}$ и т. п.). Ученики, поупражнявшіеся въ направленіи усвоенія представленій о половинѣ, четверти и трехъ четвертяхъ, оказываются лучше подготовленными къ воспріятію не только представленія о дѣленіи, но и болѣе живыхъ представленій объ умноженіи. У такихъ учениковъ большій запасъ пониманія взаимныхъ отношеній между цѣлымъ и его одинаковыми частями, и потому они лучше уразумѣваютъ, что множимое есть часть произведенія. А это очень важно.



10-ая ступень нумерація двузначныхъ чиселъ.

§ 10. Десятую ступень составляетъ усвоеніе учениками нумераціи двузначныхъ чиселъ, безъ которой дальнѣйшее движеніе впередъ невозможно. Порядокъ занятій слѣдующій: прежде всего учитель долженъ убѣдиться въ томъ—умѣютъ ли дѣти считать дальше двадцати, а если, какъ слѣдуетъ, не умѣютъ, то долженъ научить ихъ этому умѣнію.—Особенныхъ трудностей здѣсь не представляется, хотя значительнаго единообразія въ русскихъ числительныхъ именахъ, обозначающихъ нѣсколько десятковъ, не замѣчается. Сходство одного рода есть въ словахъ „двадцать“ и „тридцать“, и сходство совсѣмъ другого рода—въ словахъ „пятьдесятъ“, „шестьдесятъ“, „семьдесятъ“ и „восемьдесятъ“. Слова же „сорокъ“ и „девяносто“ занимаютъ особое мѣсто среди остальныхъ именъ

числительныхъ. Несмотря, однакоже, на это, дѣти быстро усваиваютъ себѣ самый счетъ десятками, т. е. смыслъ четырехъ, пяти и т. д. десятковъ, а равно легко усваиваютъ себѣ слова: „двадцать“, „тридцать“ и т. д., такъ какъ эти слова часто употребляются въ рѣчи всѣми окружающими. Но должно замѣтить, что при усвоеніи дѣтьми устнаго счисленія, т. е. счета, отъ одного до девятнадцати включительно, обязательно должны быть усвоены прежде всего самыя имена числительныя (т. е. слова), а потомъ уже нумерація. При изученіи же нумераціи отъ двадцати до ста, дѣти смѣло могутъ итти также и путемъ обратнымъ, т. е. сначала усвоить себѣ счетъ десятками и даже письменное обозначеніе двузначныхъ чиселъ, выраженныхъ въ десяткахъ и отдѣльныхъ единицахъ, помощью арабскихъ цифръ, а потомъ уже перейти къ примѣненію словъ „двадцать“, „тридцать“ и нумераціи чиселъ, словесно обозначаемыхъ съ помощью этихъ послѣднихъ словъ, и т. д. Этотъ послѣдній путь не только сокращаетъ трудъ по усвоенію нумераціи, наряду съ устнымъ счисленіемъ, и не только удобнѣе въ практическомъ отношеніи, но иногда цѣлесообразнѣе и въ развивательномъ. Дѣло въ томъ, что механическое называніе именъ числительныхъ въ натуральномъ порядкѣ, начиная съ двадцати (двадцать одинъ, двадцать два, двадцать три, двадцать четыре и т. д.) чрезвычайно утомительно и весьма мало говоритъ дѣтскому уму и воображенію *).

Упражненія въ счисленіи. Упражненія въ счетѣ должны вестись на наглядныхъ пособіяхъ, изъ коихъ лучше всѣхъ оказываются на этой ступени „спички“. связываемыя въ пучки по десяти спичекъ въ каждомъ. При усвоеніи нумераціи, полезно прибѣгнуть и къ помощи обыкновенныхъ торговыхъ счетовъ. На этой ступени, какъ и на предыдущихъ, можетъ сослужить службу не только для классныхъ, вслухъ, но и для самостоятельныхъ (про себя) упражненій, „Таблица для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“. Можно предложить ученикамъ списываніе двузначныхъ чиселъ въ извѣстномъ порядкѣ съ тѣмъ, чтобы потомъ провѣрить—знаютъ ли дѣти, что обозначаетъ каждая запись; одну запись отъ другой дѣти должны отдѣлять пространствомъ въ двѣ или три цифры величиною. Въ „Задачникѣ для уч—ковъ“, въ виду низкаго уровня грамотности, на которомъ находятся ученики младшаго отдѣленія, упражненій въ обозначеніи двузначныхъ чиселъ цифрами не предложено.

*) Небезполезно поэтому научить дѣтей (какъ это нѣкоторые и дѣлаютъ) счету въ слѣдующей формѣ: одинъ, два, три.... восемь, д е в я т ь, д е с я т ь; одинъ, два, три.... восемь, д е в я т ь, д в а д ц а т ь; одинъ, два, три... восемь, д е в я т ь, т р и д ц а т ь; одинъ, два, три... восемь, д е в я т ь, с о р о к ъ и т. д.

11-ая ступень: сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ и табл. умноженія.

§ 11. Одиннадцатую ступень курса составляютъ сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ и объ умноженіи въ предѣлахъ таблицы умноженія. Здѣсь упражненія съ учителемъ должны отличаться особенною послѣдовательностью, а самостоятельныя упражненія—соотвѣтствовать пройденному съ учителемъ. Многочисленныхъ з а д а ч ъ, которыя должны бы убѣдить учащихся въ необходимости сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ, а равно въ умноженіи чиселъ, произведеніе коихъ болѣе двадцати, на этой ступени не требуется: дѣти вполнѣ уяснили себѣ на предыдущихъ урокахъ необходимость, внутренній смыслъ и цѣль этихъ дѣйствій. Зато тѣмъ тщательнѣе и з у с т н о е производство сложенія и вычитанія должно быть пройдено на наглядныхъ пособіяхъ, пользуясь каковыми и возможно выяснить сущность „правилъ“ изустнаго сложенія и вычитанія, сводящуюся къ дѣйствіямъ надъ разрядными числами, т. е. сначала (при изустномъ счетѣ, единственно дозволительномъ на этой ступени) надъ десятками, и потомъ—надъ единицами. Русскіе счеты и такъ наз. „спички“ (солома) въ этихъ случаяхъ, какъ замѣчено, оказываютъ наибольшія услуги. („Таблица“ оказываетъ, равнымъ образомъ, услуги значительныя).

Порядокъ упражненій въ сложеніи. Прежде всего должны быть пройдены дѣйствія сложенія и вычитанія въ тѣхъ случаяхъ, когда при сложеніи единицъ не получается ни одного десятка, а при вычитаніи единицъ вычитаемаго изъ единицъ уменьшаемаго не требуется раздробленія одного изъ десятковъ уменьшаемаго въ единицы. Порядокъ упражненій слѣдующій: упражненія въ сложеніи десятковъ съ однозначными числами (№ 48), подобныя же самостоятельныя упражненія, изъ которыхъ одни относятся до случая, когда первое слагаемое—круглое число десятковъ, а второе—однозначное, другія—къ случаю, когда первое слагаемое однозначное число, а второе—круглое число десятковъ, третьи же упражненія относятся къ случаямъ слѣдующаго вида: $57 = 50 + ?$ или $93 = 90 + ?$ и т. д. (№ 49), далѣе—упражненія въ сложеніи двузначнаго числа съ однозначнымъ, не дающимъ новаго десятка (№ 50), а потомъ самостоятельныя въ этомъ сложеніи упражненія (№ 51) и упражненія въ сложеніи цѣлыхъ десятковъ (№ 52), засимъ—самостоятельныя упражненія въ этомъ направленіи (№ 53). Потомъ идутъ упражненія, конечно, подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, въ сложеніи любого двузначнаго числа съ круглымъ двузначнымъ числомъ (напр., $47 + 30$), въ сложеніи

любого двузначнаго съ другимъ двузначнымъ, въ которыхъ сумма единицъ перваго разряда менѣе десяти (24 + 32), въ такомъ сложеніи двузначнаго числа съ числомъ однозначнымъ и двузначнымъ, которое даетъ въ суммѣ только новый десятокъ безъ отдѣльныхъ единицъ перваго разряда (57 + 3), и, наконецъ, въ сложеніи двузначнаго числа съ однозначнымъ и съ двузначнымъ, дающимъ и новый десятокъ, и нѣсколько единицъ перваго разряда, т. е. вида: 37 + 4 или 56 + 38 (№ 54, 56, 58 и 59). Затѣмъ идутъ соотвѣтствующія самостоятельныя упражненія (№№ 51, 53, 55, 57, 59 и 61). Особенныя услуги оказываетъ на этой ступени „Таблица для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“.

Вычитаніе. Эти упражненія въ сложеніи важны и необходимы не только сами по себѣ, но и для того, чтобы ученики, благодаря сложенію двузначныхъ чиселъ, научились какъ слѣдуетъ добираться до данныхъ таблицы умноженія.—Когда сложеніе усвоено въ намѣченныхъ выше предѣлахъ, можно перейти къ вычитанію, также требующему нѣкоторой послѣдовательности: а) вычитанія 14—3, 17—2, 27—4, б) вычитанія вида 20—4, 40—7, в) вычитанія вида 23—9, 31—6, при которыхъ сначала отъ уменьшаемаго откидываютъ единицы даннаго уменьшаемаго, а потомъ—остальныя, подлежащія вычитанію, единицы, и г) вычитанія вида 82—27, 53—29 и т. п., гдѣ отнимаютъ сначала столько, чтобы осталось круглое число: 82—22, 53—23 и т. п., а потомъ—остальныя, подлежащія дальнѣйшему вычитанію единицы. (Эти упражненія составляютъ содержаніе № 62 „Задачника для уч—лей“ и № 63 „Задачника для уч—ковъ“). Должно при этомъ помнить, что самые способы производства сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ довольно разнообразны, что въ ихъ выборѣ ученикамъ должно предоставлять нѣкоторую свободу, хотя и желательно, чтобы дѣти усвоили себѣ наиболѣе краткіе способы, напр., для сложенія 47 + 26 изустно поступали бы такъ: 40 + 20 = 60, 7 + 6 = 13, 60 + 13 = 73, а для вычитанія, напр., 62—37, поступали бы, равнымъ образомъ изустно, слѣдующимъ образомъ: 62—32 = 30, 30—5 = 25. Вычитаніе учениками должно быть усвоено не только само по себѣ, но и для примѣненія къ отысканію и усвоенію произведеній таблицы умноженія. Значеніе сложенія въ этомъ дѣлѣ очевидно. Значеніе же вычитанія особенно велико для произведеній, одинъ изъ сомножителей которыхъ близокъ къ десяти, напр., для

произведенія 8 × 7, которое можетъ быть разсчитано такъ: 10 разъ 8 восемьдесятъ, 3 раза 8 двадцать четыре, а 80—24 = 56. И т. п. (Само собою разумѣется, что при классныхъ упражненіяхъ дѣтей въ вычитаніи „Таблица“ можетъ оказать немалыя услуги).

Ударенія на словахъ при сложеніи и вычитаніи двузначныхъ чиселъ. Очень полезно для учителя-практика и для учениковъ, ежели онъ и ученики читаютъ данныя для сложенія или вычитанія двузначныя числа съ извѣстными удареніями. Тогда каждое изъ произнесенныхъ чиселъ лучше выдѣляются въ сознаніи учениковъ и легче поддаются запоминанію. Случай, когда число десятковъ въ обоихъ слагаемыхъ (или въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ) одинаково, читается, напр., такъ (разгонисто напечатаны слова съ удареніями): двадцать во семь да двадцать пять. Случай, когда число простыхъ единицъ одинаково, читается, напр., такъ: сорокъ шесть и двадцать шесть. Наконецъ, случай, когда всѣ четыре цифры различны, приводитъ къ различнымъ тонамъ въ чтеніи: сорокъ восемь и двадцать семь, причемъ слово семь произносится болѣе низкимъ голосомъ. Это, если можно такъ выразиться, выразительное чтеніе словъ, обозначающихъ числа, приводитъ къ очень хорошимъ результатамъ, облегчая самое вычисленіе*).

На столько-то больше и во столько-то разъ больше. Сначала идетъ та часть таблицы умноженія, въ которой каждое произведеніе не болѣе 50 (№№ 64 и 65). Дабы можно было отнести главнѣйшую работу по усвоенію таблицы умноженія къ самостоятельнымъ работамъ учениковъ, дабы остальныя занятія ихъ подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя не страдали слишкомъ большимъ однообразіемъ, на той же ступени ученики усваиваютъ себѣ, подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, значеніе условныхъ выраженій: „на столько единицъ больше“ и „на столько-то единицъ меньше“ (№ 66 „Задачника для уч—телей“), „во столько-то разъ больше“ (№ 67), — притомъ непремѣнно на почвѣ наглядныхъ пособій и согласно требованію должнаго порядка работы (см. § 21 гл. II). Эта работа можетъ имѣть слѣдующій видъ: „Я

*) На временныхъ педагогическихъ курсахъ въ Екатеринославѣ (въ 1901 г.), въ Рязани и Новозыбковѣ (Черниг. губ.), въ 1902 г., а также и ранѣе, этотъ пріемъ выдѣленія словъ, обозначающихъ числа (употребляемый многими почти безсознательно), встрѣтилъ среди участниковъ курсовъ большое сочувствіе. Многіе, поэтому, предложили автору этой книги упомянуть объ этомъ, для пользы дѣла, хотя бы только въ „Методикѣ“, что я и исполняю.

ставлю (при этомъ учитель долженъ дѣлать то, что онъ говоритъ!) на столъ 6 кубиковъ; въ сторонѣ ставлю тоже 6 и еще 3 кубика; здѣсь, стало-быть, 6 куб., а тутъ—тоже 6 кубиковъ, да еще 3... Это выражаютъ и иначе,—говорятъ: „здѣсь 6 кубиковъ, а тутъ на три кубика больше“... Теперь я кладу сюда 4 кубика, а сюда—4 да еще 2, и говорю: „здѣсь 4 кубика, а здѣсь на два кубика больше“. Такъ ли я сказалъ?.. У меня въ одномъ карманѣ 4 коп., въ другомъ на двѣ копейки больше. Что это значитъ? (Это значитъ, что въ другомъ карманѣ тоже 4 коп., да еще двѣ). У одного крестьянина въ огородѣ 7 грядокъ, а у другого—на 4 грядки больше*)“ и т. д. Для выраженія „во столько-то разъ больше“ рядъ цѣлесообразныхъ задачъ и упражненій можетъ быть слѣдующій: „Я кладу на стулъ 4 кубика; на столъ же я кладу другіе 4 кубика, да еще 4, да еще 4, т. е. 3 раза по 4 кубика.—Что я сдѣлалъ?“...—Въ такомъ случаѣ говорятъ: „на стулѣ 4 кубика, а на столѣ въ три раза (или втрое) больше“...—Говорятъ не „три раза больше“, а „въ три раза больше“...—У меня въ одномъ карманѣ 5 копеекъ, а въ другомъ въ два раза больше.—Что это значитъ? (Это значитъ, что въ другомъ карманѣ 5 коп. да еще 5 копеекъ или два раза 5 коп.).—Говорятъ: „въ два раза больше“, а не „два раза больше“...—Самостоятельныхъ, въ этомъ направленіи, работъ учениковъ нѣтъ на этой ступени. Но съ этого момента учитель можетъ смѣло употреблять въ своихъ задачахъ выше разсмотрѣнныя выраженія, конечно, только въ утвердительной (а не въ вопросительной) формѣ. Выраженіе „на столько-то меньше“ можетъ быть выяснено въ связи съ выраженіемъ: „на столько-то единицъ больше“. Надо этимъ ограничиться и не торопиться съ выясненіемъ значенія вопросовъ: „на сколько больше?“ „на сколько меньше?“ и „во сколько разъ больше?“ Послѣдній вопросъ, къ тому же, для разрѣшенія своего требуетъ неизвѣстнаго еще ученику дѣйствія дѣленія (по содержанію). Какъ и въ другихъ случаяхъ, надобно требовать отъ учениковъ, чтобы они сами сочиняли задачи (на карандаши, кубики, грифеля, яблоки).

Повтореніе самостоят. упражненій.

Въ случаѣ, если бы во время прохожденія таблицы умноженія самостоятельныя упражненія этого рода оказались недостаточными потому, что дѣти еще не успѣли, ко времени ихъ проработки, усвоить себѣ всю таблицу умноженія, то можно повторить тѣ

*) Многоточіе означаетъ, что предшествующее ему должно быть повторено не разъ и разработано, съ помощью вопросовъ, и учениками.

же упражненія еще разъ. Точно такъ же вообще полезно повтореніе тѣхъ самостоятельныхъ упражненій, которыя почему-либо не усвоены учащимися. Не надо думать, что дѣтямъ надо предлагать непремѣнно все новыя задачи и упражненія. Этотъ взглядъ ведетъ только къ тому, что учебныя пособія по ариѳметикѣ часто разростаются до такихъ прямо громадныхъ размѣровъ, что требуется раздѣленіе задачниковъ на части, или, что задачникъ становится крайне объемистъ. Это только увеличиваетъ затраты школы на учебныя пособія, не принося никакой пользы дѣлу. Достаточно, для достиженія цѣли, повторить тѣ задачи и тѣ упражненія, которыя почему-либо учащимися не хорошо усвоены. Разнообразія же можно ввести и въ это повтореніе столько, сколько его необходимо для возбужденія или поддержанія интереса въ дѣтяхъ.

Усвоеніе таблицы умноженія.

Къ этой же 12-ой ступени обученія отнесено (№№ 68 „Задачника для уч—лей“ и 69 „Задачника для уч—ковъ“) усвоеніе дѣтьми, подъ руководствомъ учителя, таблицы умноженія на-память. Само собою разумѣется, что знаніе это необходимо (безъ этого знанія нѣтъ умноженія какъ новаго дѣйствія, а равно нѣтъ и производства умноженія). Особенно надѣяться на то, чтобы ученики, путемъ однихъ только упражненій, могли усвоить себѣ твердо и быстро всѣ данныя занимающей насъ таблицы умноженія, нѣтъ (какъ въ томъ убѣждаетъ практика) никакого основанія. Способы и средства къ сознательному усвоенію ея существуютъ; но учитель долженъ помнить объ одной опасности, которой не видѣла старая школа, гдѣ дѣло сводилось къ выучиванію дѣтьми учебнаго матеріала наизусть. Эта опасность состоитъ въ томъ, чтобы учитель не слишкомъ рано приступилъ къ упражненіямъ дѣтей въ изученіи послѣдними таблицы умноженія на-память.

Условія усвоенія таблицы умноженія.

Прежде чѣмъ приступить къ усвоенію дѣтьми на-память таблицы умноженія, учителю должно убѣдиться въ томъ—понимаютъ ли они: 1) цѣль дѣйствія умноженія и извѣстные имъ случаи его примѣненія и 2) цѣль усвоенія таблицы наизусть.—Добираться до произведеній какимъ-нибудь образомъ, притомъ изустно, должны умѣть всѣ ученики, какъ бы много на это ни потребовалось труда. Наглядныя пособія—счеты, Пиѳагорова таблица и пальцевой способъ умноженія (см. § 5 главы II). Но на-память что-либо усвоить, не упражняясь въ этомъ особенномъ направленіи, трудно, а потому надо употребить нѣкоторыя спеціальныя средства для этого усвоенія. Главнѣйшимъ средствомъ для усвоенія чего-либо на-память

является, конечно, прежде всего упражненіе въ многократномъ произнесеніи подлежащаго усвоенію вслухъ.

Размѣренная рѣчь. Размѣренная, ритмическая, рѣчь усвояется памятью легче, чѣмъ рѣчь неразмѣренная. При умноженіи всѣхъ однозначныхъ чиселъ на два, получаются слова таблицы, отвѣчающія тремъ четвертямъ счета: дважды-два четыре, дважды-три шесть и т. д. (курсивы поставлены для счета). При умноженіи же на 3, начиная съ семи, получаются слова, отвѣчающія четвертямъ счета: „трижды-семь двадцать одинъ", „трижды-восемь двадцать четыре". И т. д. Этими свойствами словъ таблицы умноженія надо воспользоваться, и дѣтей, при классномъ обученіи, надо пріучить къ хоровому, размѣренному усвоенію таблицы умноженія; при одиночномъ же можно ученика научить маршировкѣ подъ произносимые имъ звуки таблицы умноженія. При этомъ надо добиться того, чтобы ученики, говоря какія-либо слова таблицы умноженія, всегда, и даже на дальнѣйшихъ ступеняхъ обученія, прибѣгали къ тону и счету, музыкально ими уже усвоеннаго, ряда словъ, а не произносили бы эти слова безъ размѣра.—Только при умноженіи на 5 разбивается счетъ, но тамъ помогаютъ чередующіяся риемы и чередованіе тройнаго счета четвернымъ: пятью-пять двадцать пять, пятью-шесть тридцать и т. д. (Самостоятельныя упражненія въ № 69 „Задачника для уч—ковъ", и ихъ можно повторять сколько угодно разъ).

Отысканіе произведенія. § 12. Усвоеніе и особенно отысканіе результатовъ таблицы умноженія допускаютъ примѣненіе также слѣдующихъ пріемовъ: а) Если дѣти шли при отысканіи результатовъ таблицы умноженія въ порядкѣ послѣдовательномъ (сначала умножали все на 2, потомъ—все на 3, затѣмъ—все на 4 и т. д.), то опредѣленіе новыхъ результатовъ можетъ итти впередъ на основаніи предшествующаго знанія; дѣти, напр., знаютъ результаты умноженія на 6 (шестью-два, шестью-три, шестью-четыре, шестью-пять, и т. д.), тогда они легко опредѣлятъ, сколько будетъ семью-семь, на основаніи того, что шестью-семь сорокъ два, а именно разсуждая такъ: шестью-семь — сорокъ два, а семью-семь — сорокъ два да еще семь. И т. п. б) Если дѣти хорошо знаютъ, сколько будетъ дважды-десять, трижды-десять, четырежды-десять и т. д., то дважды-девять, трижды-девять, четырежды-девять и т. д., они могутъ опредѣлять не только сложеніемъ, но и вычитаніемъ: семью-десять—семьдесятъ, а семью-девять — семьдесятъ безъ семи, и т. п. в) Можно въ основу

отысканія нѣкоторыхъ результатовъ положить табличку умноженія на 5 и на меньшія, чѣмъ на 5, числа: зная, сколько будетъ пятью-семь и сколько—трижды-семь, легко опредѣлить—сколько будетъ восемью-семь: пятью-семь 35, да еще трижды-семь 21, итого—35 да 21 или 56.—Вообще добираться до результатовъ таблицы умноженія дѣти должны творчески-самостоятельно и изобрѣтеніемъ. Наизусть, вслухъ, усваивать таблицу дѣти должны сначала на наглядныхъ пособіяхъ, съ помощью „Пиѳагоровой таблицы", затѣмъ пальцевымъ пріемомъ и, наконецъ, пользуясь размѣренною рѣчью. Учитель долженъ напоминать дѣтямъ, чтобы они, встрѣтившись съ требованіями умноженія (напр., пятью-семь), тотчасъ произносили это требованіе размѣренною рѣчью (ритмически), дабы облегчить себѣ дѣло припоминанія.

12-ая ступень дѣленіе на изв. число частей. § 13. Только на двѣнадцатой ступени возможно приступить къ выясненію дѣтямъ понятія о дѣленіи числа на извѣстное число равныхъ между собою частей. Ранѣе, особенно въ первомъ десяткѣ, дѣти не видятъ ариѳметическаго дѣйствія дѣленія, такъ какъ сами они склонны въ первомъ десяткѣ вычислять все съ помощью сложенія. Сверхъ того, надо помнить, что между дѣленіемъ на извѣстное число одинаковыхъ частей и дѣленіемъ на извѣстныя одинаковыя части есть не только глубокое ариѳметическое, но также весьма рѣзкое логическое различіе. Прежде всего дѣтямъ должно предложить задачи, которыхъ рѣшеніе требуетъ новаго дѣйствія, и притомъ перваго вида его, т. е. дѣленія на извѣстное число равныхъ частей. Такихъ задачъ, въ особенности если имъ предпослать задачи на наглядныхъ пособіяхъ, потребуется не особенно много. Для того, чтобы дѣти легче убѣдились въ необходимости новаго дѣйствія, задачи эти не должны поддаваться быстрому разрѣшенію съ помощью догадокъ. Поэтому задачи на раздѣленіе 2-хъ, 4-хъ, 6-ти, даже 8-ми единицъ на двѣ равныя части или 3-хъ и 6-ти единицъ на 3 равныя части неумѣстны въ большомъ количествѣ на этой ступени обученія. Начинать надо съ дѣйствительнаго раздѣленія, предложивъ сначала задачу на наглядномъ пособіи (№ 70 „Задачника для уч—лей"): „у меня на столѣ лежитъ 18 кубиковъ; я хочу раздать ихъ этимъ тремъ ученикамъ такъ, чтобы у всѣхъ было поровну (чтобы каждый изъ нихъ получилъ столько же, сколько получилъ его товарищъ); какъ это сдѣлать?" Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію этой задачи на основаніи таблицы умноженія, должно учащимся показать, что они ее

могутъ разрѣшить, раздавъ всѣмъ ученикамъ сначала по одному кубику, потомъ еще по одному и т. д., и, наконецъ, сосчитавъ—сколько досталось каждому изъ нихъ всего кубиковъ. Важно, чтобы дѣти прежде всего поняли самую возможность подобной задачи и возможность ея разрѣшенія помощью какого-либо пріема. Когда это сдѣлано, надо дѣтей достаточно поупражнять въ этомъ направленіи, давъ укрѣпиться ихъ представленію о дѣйствительномъ (не ариѳметическомъ, а наглядномъ) дѣленіи. Послѣ этого можно перейти къ дѣленію ариѳметическому, т. е. къ *вычисленію* частнаго.

Переходъ къ дѣленію съ помощью умноженія.

Переходъ къ разрѣшенію задачи на основаніи таблицы умноженія можетъ быть сдѣланъ слѣдующими двумя способами: 1) должно обратиться къ умноженію и выяснить, что произведеніе есть цѣлое, множимое—часть произведенія, а множитель—число частей произведенія, изъ которыхъ каждая равна множимому. Для этого можно обратиться къ умноженію на наглядныхъ пособіяхъ (каждая кучка кубиковъ—часть, число кучекъ—число частей, всѣ кубики—цѣлое и т. п.), къ умноженію, вытекающему изъ задачъ, и, наконецъ, къ умноженію отвлеченныхъ чиселъ. Изъ него дѣти должны вынести, что запись $7 \times 5 = 35$ означаетъ также и то, что каждая часть нѣкотораго цѣлаго есть 7, что такихъ частей 5, и что цѣлое въ такомъ случаѣ 35. Когда это усвоено дѣтьми, можно перейти къ обозначенію дѣленія числа на 5 равныхъ частей ($35 \mid 5 = 7$), причемъ первое число здѣсь очевидно представляетъ цѣлое, второе — число одинаковыхъ частей, а третье (частное)—каждую часть. Слѣдующія далѣе задачи, а также упражненія на наглядныхъ пособіяхъ должны быть истолкованы множество разъ такимъ же образомъ. Несмотря на кажущуюся медленность этого пріема, онъ приводитъ, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ, къ прекраснымъ результатамъ, выясняя дѣтямъ связь между дѣленіемъ и умноженіемъ. 2) Другой способъ состоитъ въ слѣдующемъ: положимъ, что я роздалъ всѣмъ тремъ ученикамъ 18 кубиковъ; каждому досталось по нѣсколько штукъ, притомъ поровну; по сколько? положимъ, что по 2 кубика; два кубика, да еще два, да еще два составятъ 6 кубиковъ; мало! положимъ — по 3 кубика; 3-мъ мальчикамъ по 3 кубика составитъ 9 штукъ; тремъ мальчикамъ по 4 кубика 12 куб.—Все мало...—Все дѣло въ томъ, чтобы получить 18! Такое число только одно и есть: это — число шесть...—Стало-быть, каждый получитъ по 6-ти кубиковъ. Но къ подобному разсужденію, однако-же, слѣдуетъ приступать не ранѣе усвоенія дѣтьми пріема рѣшенія задачи путемъ дѣйствительной раздачи каждому ученику по одному кубику.—Во всякомъ случаѣ, всѣ задачи этого рода должны быть сначала задаваемы и разрабатываемы на различныхъ наглядныхъ пособіяхъ. Упражненія же въ дѣйствительномъ раздѣленіи числа на части должны предшествовать мысленному раздѣленію числа.—Задачи, большею частью, должны быть таковы, чтобы только немногіе ученики младшаго отдѣленія легко разрѣшили ихъ на-угадъ, не сознавая того особаго хода мысли, который вообще въ такихъ случаяхъ приводитъ къ разрѣшенію задачи. Когда дѣти уяснили себѣ хоть какой-нибудь пріемъ рѣшенія этого рода задачъ, имъ долженъ быть показанъ знакъ дѣленія на извѣстное число равныхъ между собою частей, за каковой можно принять знакъ $\mid$. Помощью этого знака требованіе „раздѣлить (разложить) 15 на три равныя части“ записываютъ такъ: $15 \mid 3$. Эту запись ученики должны сначала читать такъ: „пятнадцать раздѣлить на три одинаковыя части“. Когда дѣленіе постигнуто на наглядномъ пособіи, можно перейти къ мысленному дѣленію и къ нахожденію доли цѣлаго числа (№ 71 „Задачника для уч—лей“ и №№ 72 и 73 „Задачника для уч—ковъ“). На этой же ступени (№ 72 „Задачника для учителей“) дѣти могутъ постигнуть происхожденіе сначала доли единицы ($21 \mid 5 = 4^1/_5$ и т. п.) при дѣленіи, дающемъ въ остаткѣ единицу, потомъ — нѣсколькихъ долей ($23 \mid 6 = 3^5/_6$), далѣе самостоятельное происхожденіе правильной дроби отъ дѣленія меньшаго числа на большее ($3 \mid 4 = {}^3/_4$), и, наконецъ, научиться обозначенію дробей.—Это, впрочемъ, можетъ быть опущено и перенесено на одну изъ дальнѣйшихъ ступеней (на 28-ую), если учитель находитъ такую отсрочку болѣе удобной.

Далѣе можетъ итти уже ознакомленіе дѣтей съ выраженіемъ „уменьшить число въ нѣсколько разъ“. Надо однако же при этомъ принять во вниманіе медленность, съ которою ученики усвояютъ себѣ значеніе условныхъ выраженій (терминовъ). Разъ ученики изъ предыдущихъ упражненій себѣ усвоили значеніе условныхъ выраженій „больше на столько-то“, „больше во столько-то разъ“, они легко усваиваютъ себѣ значеніе выраженій „меньше на столько-то“ и „меньше во столько-то разъ“. Несмотря на это, не надо торопиться съ

Уменьшить въ нѣсколько разъ.

переходомъ къ условнымъ выраженіямъ „увеличить“ и „уменьшить“ (на столько-то и во столько-то разъ). Усвоеніе условныхъ выраженій для дѣтей представляетъ очень большія затрудненія; торопливость и нетерпѣніе при усвоеніи значенія условныхъ выраженій отзывается крайне вредно на всемъ курсѣ, какъ дальнѣйшемъ, такъ даже и на предшествовавшемъ. Они сбиваютъ учащагося съ толку не только относительно значенія новыхъ, условныхъ, выраженій, но и относительно значенія выраженій, бывшихъ ранѣе для него понятными и вовсе не условныхъ. Ученики должны понять, что говорятъ „уменьшить въ два раза“, вмѣсто того, чтобы говорить „раздѣлить на двѣ одинаковыя части“, и что здѣсь только слова другія, а смыслъ—тотъ же.

Связь дѣленія съ умноженіемъ. § 14. Связь дѣленія на извѣстное число равныхъ частей съ умноженіемъ можно выяснить на дальнѣйшихъ задачахъ (№№ 75 и 76 „Задачника для уч—лей“), послѣ чего дѣтямъ могутъ быть предложены (подъ № 77 „Задачника для учениковъ“) смѣшанныя упражненія всякаго рода. Что же касается того, какъ учащемуся надо читать (вначалѣ) запись $15 \mid 3 = 5$, то лучше всего, если онъ пріучится понимать ее такъ: 15 — цѣлое, 3 — число одинаковыхъ частей (на которое надо раздѣлить цѣлое), а 5—каждая часть *), или короче: 15—цѣлое, частей 3, каждая часть—5.

Дѣленіе съ остаткомъ. Когда смыслъ дѣленія на части усвоенъ, можно перейти къ словесному обозначенію записей, сначала въ повелительной формѣ: а) 15 раздѣлить на 3 одинаковыя части, будетъ 5, б) 15 раздѣлить на 3, будетъ 5, и, наконецъ, в) въ обычной: „15, дѣленное на 3, равно 5“ (самое краткое, но весьма условное словесное обозначеніе).—Когда дѣленіе безъ остатка усвоено, слѣдуетъ, пользуясь также помощью „Таблицы классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“, научить дѣтей дѣленію однозначнаго и двузначнаго числа на такія одно-

*) Со словами „равно“ и „равняется“ или еще лучше (вначалѣ) „все равно, что“ дѣти должны быть ознакомлены раньше. Выше не указано, на какой именно ступени это должно быть сдѣлано, такъ какъ самъ учитель лучше можетъ судить — когда именно ознакомленіе съ значеніемъ этихъ словъ будетъ своевременно. Скорѣе всего это можетъ быть сдѣлано, кажется, на седьмой ступени, когда появляются формулы разложенія ($12 = 10 + 2$), въ которыхъ знакъ равенства не можетъ быть удобно замѣненъ словомъ „будетъ“.

значныя, при которыхъ получается остатокъ. Но частное должно быть при этомъ непремѣнно числомъ однозначнымъ. Для самостоятельной работы учениковъ во всѣхъ дѣйствіяхъ, должны быть предлагаемы такія упражненія (№ 77 „Задачника для учениковъ“), въ которыхъ дѣйствія эти не выходятъ за предѣлы усвоеннаго учениками.

Простое тройное правило. § 15. Учитель не долженъ забывать, что внѣ таблицы умноженія на этой ступени не должно встрѣчаться ни одного случая дѣленія двузначнаго числа на однозначное, съ каковымъ дѣленіемъ (безъ остатка) онъ, прежде всего, долженъ познакомить учащагося. Для упражненія дѣтей въ дѣленіи на извѣстное число одинаковыхъ частей съ большою пользою для дѣла могутъ быть проработаны задачи на такъ наз. простое тройное правило въ предѣлахъ таблицы умноженія. (Таковы задачи подъ № 78 „Задачника для уч—лей“). Эти задачи составлены такъ, что для ихъ разрѣшенія можно сначала раздѣлить одну величину на извѣстное число равныхъ частей, а потомъ умножить полученное частное на нѣкоторое отвлеченное число. (Въ нихъ не должно быть случая, когда для рѣшенія задачи на тройное правило требуется найти сначала отношеніе двухъ величинъ, а потомъ уже—нѣкоторую величину умножить на это отношеніе). Здѣсь же, между дѣломъ, ученики могутъ усвоить себѣ отношенія фунта къ лоту и взаимныя отношенія сажени, аршина, вершка, фута, дюйма и линіи. Полезно также запомнить, что въ аршинѣ 28 дюймовъ.

13-ая ступень: кратное сравненіе. § 16. Тринадцатую ступень обученія составляетъ ознакомленіе дѣтей съ другимъ случаемъ дѣленія— съ кратнымъ сравненіемъ. (Для этой цѣли служатъ задачи подъ №№ 79—81 „Задачника для уч—ей“). Вся трудность заключается въ томъ, что дѣлитель на 12-й ступени обозначалъ число одинаковыхъ частей, а частное—каждую часть, на 13-ой же дѣлитель выражаетъ—какъ велика каждая часть, а частное (отношеніе)—сколько такихъ частей въ цѣломъ. Или, говоря иначе, частное здѣсь выражаетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, т. е. во сколько разъ послѣднее больше дѣлителя. Эта ступень представляетъ большія трудности, и потому наглядныя пособія не должны быть забываемы, — въ особенности при выясненіи смысла вопроса: „во сколько разъ одно число больше или меньше другого“. Необходимы также упражненія, устанавливающія связь и различіе между дѣленіемъ на извѣстное число оди-

наковыхъ частей и дѣленіемъ на извѣстныя части (№ 80), а также упражненія въ усвоеніи дѣтьми смысла вопроса „на сколько больше?“ (они знаютъ только смыслъ утвержденія „на столько-то больше“) и вопроса „во сколько разъ больше?“ Дѣти, на задачахъ съ условіями, должны освоиться съ тѣмъ, что если одно число больше другого въ нѣсколько разъ, то второе во столько же разъ менѣе перваго (№№ 82 и 83).

Связь кратнаго сравненія съ умноженіемъ и отличіе его отъ дѣленія на извѣстное число равныхъ частей учитель не долженъ забывать ни на одну минуту; въ противномъ случаѣ онъ рискуетъ напрасно потратить много времени. (За знакъ кратнаго сравненія въ этой книгѣ и „Задачникѣ для уч—лей“ и „Задачникѣ для уч—ковъ“ принято двоеточіе). Запись 15 : 5 = 3 учитель долженъ сначала читать такъ: „пятнадцать единицъ содержатъ пять три раза“ или „15 — цѣлое, 5 — каждая часть, 3—число такихъ частей“ или, наконецъ: „пять содержится въ 15-ти 3 раза“. Что кратное сравненіе есть не что иное, какъ видъ дѣленія, ученики младшаго отдѣленія понять съ помощью разсужденій не могутъ, и поэтому добиваться отъ нихъ такого пониманія было бы излишне. Но ученики понимаютъ отлично, на основаніи наглядnаго представленія, что и въ томъ случаѣ, когда мы раздаемъ карандаши нѣсколькимъ мальчикамъ и хотимъ узнать, по сколько карандашей достанется каждому, и въ томъ случаѣ, когда мы раскладываемъ карандаши въ одинаковыя кучки и хотимъ узнать—сколько такихъ кучекъ, мы дѣлимъ извѣстное число на части. Но въ первомъ случаѣ намъ извѣстно число частей, а во второмъ—каждая часть. (Связи между кратнымъ сравненіемъ и дѣленіемъ на извѣстное число частей и умноженіемъ посвящены: № 85 „Задачника для уч—ковъ“ и №№ 86, 87, 88 и 89 „Задачника для уч—лей“). Само собою разумѣется, что и на этой ступени въ упражненія не должно входить данныхъ, которыхъ нѣтъ въ таблицѣ умноженія.—Задачи на простое тройное правило, требующія не производства дѣленія и умноженія, а производства сначала дѣленія на извѣстное число равныхъ между собою частей, а потомъ кратнаго сравненія, очень важны (№ 90 „Задачника для уч—лей“). Задачи эти должны быть слѣдующаго рода: 3 аршина ситцу стоятъ 21 коп.; сколько арш. такого же ситца можно купить на 35 коп. (21 к. : 3 = 7 к.; 35 к. : 7 к. = 5). Вслѣдствіе болѣе значительной грамотности учениковъ, имъ можно для самостоятельной работы предложить

также задачи съ условіями (напр., изъ „Задачника для учениковъ“ подъ №№ 91 — 94, а также, послѣ проработки съ ними № 95, задачи подъ № 96, представляющія собою повтореніе уже рѣшенныхъ подъ руководствомъ учителя).

Почему кратное сравненіе слѣдуетъ за дѣленіемъ?

§ 17. Нѣкоторые учителя и авторы учебныхъ пособій кратному сравненію двухъ чиселъ отводятъ первое, а дѣленію на извѣстное число равныхъ между собою частей—второе мѣсто,—въ особенности, когда рѣчь идетъ о письменномъ производствѣ дѣйствія дѣленія. Мало того: часто забываютъ о различіи обоихъ видовъ дѣленія, и самое производство дѣленія сводятъ чаще всего къ вопросу о томъ, сколько разъ первая цифра дѣлителя содержится въ первой или въ первыхъ двухъ цифрахъ дѣлимаго. Не говоримъ уже о томъ, что при раздѣленіи числа на извѣстное число одинаковыхъ частей, вопросъ этотъ нецѣлесообразенъ, съ точки зрѣнія логической. Важно и то, что въ предѣлахъ первой сотни дѣленіе на извѣстное число равныхъ частей должно непремѣнно предшествовать кратному сравненію. Дѣло въ томъ, что это дѣйствіе ближе къ жизни. Сверхъ того, когда дѣти совершаютъ дѣленіе 24 | 3, то 3 обозначаетъ число одинаковыхъ частей, и ученикъ можетъ воображеніемъ и памятью добраться до частнаго, подбирая на основаніи таблицы умноженія на 3 (трижды-два 6, трижды-три 9, трижды-четыри 12, и т. д.), искомое частное. Величина дѣлителя занимаетъ, при этомъ подбираніи надлежащаго частнаго, первое мѣсто (трижды-восемь, а не восемью-три). При производствѣ же кратнаго сравненія 35 : 5, число 5 занимаетъ мѣсто множимаго, и ученикъ долженъ подыскивать искомое частное по непривычной для него таблицѣ (дважды-пять, трижды-пять, четырежды-пять, пятью-пять, шестью-пять), и первое-то слово ему какъ-разъ неизвѣстно, а вспоминать что-либо гораздо легче, начиная съ перваго, а не со второго слова. Вотъ почему и практически важно, чтобы дѣленіе на извѣстное число равныхъ частей занимало 12-ую, кратное же сравненіе (т. е. дѣленіе на извѣстныя части)—13-ую ступень курса, а не обратно.

14-ая ступень.

§ 18. Упражняя дѣтей на самостоятельныхъ занятіяхъ въ дѣленіи числа на извѣстное число равныхъ частей и въ кратномъ сравненіи чиселъ, т. е. въ дѣленіи число на извѣстныя равныя части, а также въ остальныхъ дѣйствіяхъ (для каковой цѣли могутъ служить не только указанныя выше упражненія,

но и многія предыдущія), учитель можетъ перейти къ нумераціи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ, къ сложенію чиселъ трехзначныхъ и вычитанію четырехзначныхъ. Это—тѣ ариѳметическія знанія и умѣнія, безъ которыхъ школа не вправѣ выпустить ученика, почему-либо ограничивающагося въ своемъ образованіи однимъ годомъ пребыванія въ школѣ. (Статистика доказываетъ, что такихъ учениковъ, къ сожалѣнію, очень много, особенно въ нѣкоторыхъ областяхъ Россіи). Это—четырнадцатая ступень обученія (упражненія подъ №№ 97—100 „Задачника для учителей“ и подъ № 101 „Задачника для учениковъ“, а также подъ №№ 102, 103, 105, 107, 108, 110 и 112 „Задачника для учителей“, и подъ №№ 104, 106, 109, 111 и 113 „Задачника для учениковъ“). Не только нумерація четырехзначныхъ чиселъ, но даже дѣйствія сложенія и вычитанія чиселъ трехзначныхъ и четырехзначныхъ на этой ступени не представляютъ уже для учениковъ такихъ трудностей, которыя потребовали бы отъ учителя какихъ-либо особенныхъ, искусственныхъ пріемовъ обученія. Онъ можетъ совершенно свободно прибѣгнуть къ изобрѣтающей (эвристической) формѣ обученія, и учащіеся будутъ въ состояніи распространить пріобрѣтенныя ими ранѣе умѣнія и знанія на случаи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ.—Въ слѣдующей главѣ этой книги эти соображенія разсмотрѣны съ точки зрѣнія нумераціи вообще, дабы не повторять одного и того же два раза.—Одно неизлишне здѣсь замѣтить, что при обозначеніи четырехзначныхъ чиселъ должно пріучать дѣтей къ отдѣленію цифры тысячъ отъ цифры сотенъ промежуткомъ въ цѣлую цифру, а не запятою. Постановка же запятой послѣ цифры тысячъ не можетъ быть оправдана, потому что запятой придается особенное значеніе при обозначеніи десятичныхъ дробей, а также потому, что при числахъ, меньшихъ милліона, въ ней нѣтъ никакой надобности даже въ случаѣ, когда цифра тысячъ ничѣмъ не отдѣлена отъ цифры сотенъ. Точка же для этой цѣли неудобна потому, что она иногда замѣняетъ знакъ умноженія.

Если время и другія условія дозволяютъ, то въ концѣ перваго года обученія дѣтей можно научить также умноженію трехзначныхъ чиселъ на однозначное и обоимъ случаямъ дѣленія на однозначное. Методическія указанія относительно этихъ статей курса также отнесены къ слѣдующей главѣ.

Для того чтобы курсъ перваго года вполнѣ удовлетворялъ требованіямъ истинной округленности (концентраціи), необходимо было бы (какъ

это разъяснено въ другомъ мѣстѣ) въ теченіе перваго же года пройти также и ученія о производствѣ умноженія и дѣленія на многозначное число. Но это, по причинамъ, изложеннымъ тамъ же, невозможно безъ яснаго и большого ущерба для дѣла. А потому статьи эти входятъ въ курсъ второго года, методическія же указанія относительно этихъ статей курса даны поэтому равнымъ образомъ въ слѣдующей главѣ. Во многихъ школахъ, пользующихся „методою цѣлесообразныхъ задачъ“, въ первый годъ успѣваютъ пройти только первыя 12—13 ступеней, а въ нѣкоторыхъ—всѣ четырнадцать и даже 15-ую ступень и болѣе.

Условія письм. производства сложенія и вычитанія.

Разработывая съ дѣтьми письменные способы производства сложенія трехзначныхъ и многозначныхъ чиселъ, учитель долженъ помнить, что эти способы требуютъ отъ ученика: 1) знанія таблицы сложенія двухъ однозначныхъ слагаемыхъ, и 2) умѣнія быстро прибавлять къ любому двузначному любое однозначное. Безъ этого знанія и безъ этого умѣнія письменное производство дѣйствія сложенія прямо невозможно, если къ этому производству дѣйствія предъявлять требованія не только вѣрности, но и большей или меньшей быстроты. Поэтому учащій долженъ, въ порядкѣ и въ безпорядкѣ, повторять съ учениками (хоромъ и въ одиночку) эти таблицы:

I. а) второе слагаемое 1, т. е. $1+1$; $2+1$; $3+1$; $4+1$ и т. д. до $9+1$ включительно, б) второе слагаемое 2, т. е. $1+2$; $2+2$; $3+2$; $4+2$; и т. д. до $9+2$ включительно; в) второе слагаемое 3, т. е. $1+3$; $2+3$; $3+3$; $4+3$ и т. д. до $9+3$ включительно; г) второе слагаемое 4, т. е. $1+4$; $2+4$; $3+4$; $4+4$; и т. д. до $9+4$ включительно; и т. д.; наконецъ, д) второе слагаемое 9, т. е. $1+9$; $2+9$; $3+9$; $4+9$ и т. д. до $9+9$ включительно.

II. а) Первое слагаемое десятокъ, два десятка и т. д. до девяти десятковъ включительно, а второе слагаемое—число однозначное; б) первое слагаемое—любое двузначное число, а второе слагаемое—число однозначное, не дающее новаго десятка въ суммѣ; в) первое слагаемое—любое двузначное число, а второе слагаемое—число однозначное, дополняющее его до ближайшаго круглаго числа ($36+4$, $87+3$ и т. п.); г) первое слагаемое—любое двузначное число, а второе—однозначное число, образующее новый десятокъ и еще одну или нѣсколько единицъ перваго разряда ($27+6$, $38+5$ и т. п.). (Полезно во всѣхъ этихъ направленіяхъ методически поупражнять дѣтей на „Таблицѣ для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“).

Что касается письменнаго производства вычитанія трехзнач-

ныхъ и многозначныхъ чиселъ, то для возможности этого производства необходимо знать таблицу вычитанія, т. е. свободно произносить сравнительно весьма немногочисленныя, разности:

а) 1 — 1; 2 — 1; 3 — 1; 4 — 1; и т. д. до 10 — 1; б) 2—2; 3—2; 4—2; 5—2; и т. д. до 11—2; в) 3—3; 4—3; 5—3; 6—3; и т. д. до 12—3; наконецъ, г) 9 — 9; 10—9; 11—9; 12—9; и т. д. до 18—9.

Безъ твердаго знанія этихъ таблицъ нѣтъ и не можетъ быть письменнаго производства сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ, въ истинномъ значеніи этихъ словъ.

Изустное производство сложенія и вычитанія двузн. чиселъ.

Ученики должны на этой ступени получить хоть нѣкоторое понятіе о размѣрахъ того благодѣянія, которое оказываетъ человѣку самая возможность письменнаго производства сложенія и вычитанія надъ многозначными числами. Поэтому полезно предварительно предложить ученикамъ изустно произвести сложеніе и вычитаніе двухъ хотя бы, напр., трехзначныхъ, чиселъ. Ученики тогда убѣдятся, что даже запомнить данныя числа, не записавъ ихъ, очень трудно, и что по мѣрѣ изустнаго производства дѣйствія, начиная съ единицъ высшаго разряда, очень легко забывается, хотя бы уменьшаемое и вычитаемое даже и были записаны,—сколько осталось отъ уменьшаемаго и сколько еще надо вычесть.

Наглядныя пособія.

Наглядными пособіями могутъ служить на 14-ой ступени „солома“ и торговые счеты. Такъ называемый „заемъ“ единицы высшаго разряда лучше сначала называть развязываніемъ (ежели наглядными пособіемъ служила „солома“) или размѣномъ (ежели учитель исходилъ изъ примѣра съ нѣсколькими сотенными, нѣсколькими десятирублевыми и нѣсколькими рублевыми бумажками,—примѣра прямо превосходнаго) и, наконецъ, раздробленіемъ, — что наиболѣе отвѣчаетъ сущности дѣла.

Ариѳметическіе термины.

§ 19. Выше ничего не сказано, необходимо ли ознакомлять учащихся младшаго отдѣленія съ нѣкоторыми римскими, а равно съ нѣкоторыми славянскими цифрами. Точно также ничего не сказано о времени объясненія имъ терминовъ: слагаемое, сумма; уменьшаемое, вычитаемое, разность, остатокъ; множимое, множитель, произведеніе; дѣлимое, дѣлитель, частное, отношеніе и остатокъ.

Первый годъ обученія въ школѣ долженъ преслѣдовать преимущественно усвоеніе дѣтьми главнѣйшихъ ариѳметическихъ представленій и умѣній. Чѣмъ менѣе, стало-быть, курсъ уснащенъ разными правилами, опредѣленіями, словами, употребительными почти исключительно въ математикѣ (т. е. математическими терминами), тѣмъ лучше. Поэтому предоставляется вполнѣ на усмотрѣніе учащаго выборъ тѣхъ ступеней, на которыхъ онъ сочтетъ за благо ознакомить дѣтей съ поименованными выше терминами. Ничего нельзя имѣть даже противъ полнаго исключенія всей терминологіи изъ курса перваго года обученія, такъ какъ далеко не въ ней сила предлагаемаго тамъ курса.—Ознакомленіе же учениковъ съ римскими и церковно-славянскими цифрами полезно, но не необходимо.

Когда вводить термины?

Во всякомъ случаѣ ознакомленіе съ терминологіею сложенія неумѣстно ранѣе 5-ой, съ терминологіею вычитанія—ранѣе 6-ой, умноженія—ранѣе 9-ой, и дѣленія на извѣстное число равныхъ частей—ранѣе 12-ой ступени обученія. Кратное сравненіе, какъ извѣстно, отдѣльной терминологіею (только частное, при кратномъ сравненіи, иногда называется отношеніемъ) не обладаетъ, и это нисколько не мѣшаетъ усвоенію дѣтьми умѣнія находить кратное (т. наз. геометрическое) отношеніе двухъ чиселъ. Въ виду этого и вслѣдствіе того, что подведеніе обоихъ видовъ дѣленія подъ общее понятіе въ первый годъ обученія невозможно, а введеніе новыхъ названій (терминовъ) безполезно, учащему либо безъ объясненія приходится называть въ этомъ случаѣ первое число—дѣлимымъ, второе—дѣлителемъ, а результатъ кратнаго сравненія—частнымъ, либо же отказаться отъ этихъ названій. Учитель, безъ всякаго сомнѣнія, самъ увидитъ, въ теченіе второго же полугодія перваго года обученія,—можетъ ли онъ и долженъ ли, хотя бы для краткости рѣчи, ознакомить дѣтей съ терминологіею кратнаго сравненія, если ему это ранѣе почему-либо не удалось.

Римскія и церковно-славянскія цифры.

Что касается римскихъ и славянскихъ цифръ, то въ одномъ изъ задачниковъ, приспособленныхъ къ методѣ цѣлесообразныхъ задачъ, не помѣщено отдѣльныхъ упражненій этого рода. Дѣло въ томъ, что самъ учитель замѣтитъ, когда наступило время для сообщенія свѣдѣній объ этихъ цифрахъ и для упражненія дѣтей въ обозначеніи чиселъ съ помощью этихъ цифръ. Лучше избрать для этого такіе уроки, когда дѣтямъ нельзя сообщить ничего новаго потому, что они себѣ еще не усвоили предыдущаго, и когда почему-либо особенно понадобится внесеніе разнообразія въ занятія. Относительно объема тѣхъ свѣдѣній о цифрахъ римскихъ и славянскихъ, которыя могутъ быть усвоены учащимися въ первый годъ обученія, должно замѣтить, что практическую важность имѣютъ (обозначеніе, помощью римскихъ цифръ, всѣхъ чиселъ первыхъ двухъ десятковъ (эти цифры встрѣчаются на циферблатѣ часовъ и при обозначеніи столѣтій въ книгахъ), да обозначеніе небольшихъ чиселъ славянскими цифрами. Но для усвоенія этихъ нумерацій въ теченіе перваго года, можетъ быть, окажется слишкомъ мало времени. А потому учитель въ первый годъ обученія можетъ, въ случаѣ надобности, ограничиться, при ознакомленіи дѣтей съ цифрами славянскими и римскими,

только самымъ необходимымъ, отложивъ подробное прохожденіе славянской и римской нумераціи до болѣе благопріятнаго времени. Ознакомленіе дѣтей съ римскою нумераціей во всемъ ея объемѣ, вообще, не нужно для начальной школы, да оно и не относится къ предмету ариѳметики. Для того же, чтобы обозначенія чиселъ съ помощью церковно-славянскихъ буквъ и римскихъ цифръ были всегда у учителя и у учениковъ подъ руками и исподволь усвоялись послѣдними, нумерація страницъ въ „Задачникѣ для учениковъ“ проведена троякая: обычная (арабскими цифрами), церковно-славянская и римская. Опытъ показываетъ, что, благодаря этому, ученики, большею частью, и сами усвояютъ себѣ церковно-славянскую и римскую нумераціи, нуждаясь только въ весьма немногочисленныхъ указаніяхъ учителя.

Особенности курса 1-го года.

§ 20. Практику-учителю полезно и даже важно отдать себѣ отчетъ въ томъ—каковы особенности курса ариѳметики, подлежащаго усвоенію дѣтьми въ теченіе перваго года обученія въ начальной одноклассной школѣ. Особенности эти сводятся къ слѣдующему: а) почти весь курсъ, за исключеніемъ послѣдней ступени, относится до производства четырехъ дѣйствій надъ числами первой сотни, причемъ для первыхъ двухъ дѣйствій не дѣлается никакихъ ограниченій, дѣйствія же умноженія совершается преимущественно въ предѣлахъ таблицы умноженія, а четвертое (дѣленіе обоего рода) не выходитъ за предѣлы такого дѣленія, когда и дѣлитель и частное—одновременно однозначныя числа; б) главнѣйшее вниманіе обращается на вѣрность и наглядность ариѳметическихъ представленій учениковъ; в) задачи, въ большинствѣ случаевъ, принадлежатъ къ числу простыхъ, и только въ концѣ года появляются въ курсѣ задачи болѣе или менѣе сложныя, но отнюдь не трудныя.—Изъ устныхъ вычисленій (хотя бы числа данныя и искомое записывались) главное свое вниманіе учитель долженъ обращать: а) на сложеніе двухъ или нѣсколькихъ однозначныхъ чиселъ; б) на умноженіе и дѣленіе въ предѣлахъ таблицы умноженія; и в) на сложеніе и вычитаніе двухъ двузначныхъ чиселъ.—Задачъ съ многочисленными условіями должно избѣгать при упражненіяхъ въ устномъ вычисленіи: введеніе подобныхъ задачъ въ курсъ перваго года было бы только помѣхою при прохожденіи курса, поддающагося проработкѣ только въ случаѣ, если учитель дорожитъ временемъ. Если онъ самъ — хорошій счетчикъ и въ состояніи живо и безошибочно вычислять изустно, то его ученики, даже въ теченіе перваго года, пріобрѣтутъ нѣкоторую сноровку въ очень быстромъ устномъ вычисленіи. Къ счастію, въ указанныхъ предѣлахъ умѣніе болѣе или менѣе быстро вычислять наизусть дастся дѣтямъ довольно легко. А потому отягчать младшее отдѣленіе многочисленными искусственными упражненіями было бы нецѣлесообразно какъ съ точки зрѣнія практической (курсъ не будетъ пройденъ), такъ и съ точки зрѣнія педагогической (всему — свое время).—Въ способности учителя къ нѣкоторому самоограниченію заключается одна изъ трудно-выполнимыхъ, но за-то несомнѣнныхъ обязанностей его по отношенію къ начальной школѣ, и къ младшему отдѣленію ея—въ особенности. Отъ выполненія этой обязанности зависитъ очень многое во всемъ дальнѣйшемъ ходѣ курса начальной ариѳметики. Полезно учить дѣтей сложенію и вычитанію многозначныхъ чиселъ на счетахъ, если не въ первый годъ обученія, то въ слѣдующіе. Но если ученики могутъ осилить въ первый же годъ и 14-ю ступень, то вычисленія на счетахъ для нихъ крайне интересны и полезны.

Но въ указанныхъ, въ началѣ параграфа, случаяхъ изустнаго вычисленія, ученики младшаго отдѣленія должны, однакоже, пріобрѣсти полную власть надъ непремѣнно изустнымъ производствомъ всѣхъ четырехъ дѣйствій въ выше намѣченныхъ предѣлахъ.

Услуги десятичной системы.

§ 21. Благодѣянія, оказываемыя десятичною системою нумераціи, въ курсѣ 1-го года проявляются не съ первыхъ же ступеней, да и вообще проявляются не въ полной своей мѣрѣ. На 4-ой ступени ученики ознакомляются съ числами 2-го десятка, на 7-й они полнѣе уясняютъ себѣ сущность десятка; еще полнѣе эта сущность выступаетъ на 8-й ступени; на 11-ой система счисленія для всякихъ двузначныхъ чиселъ вступаетъ въ полныя свои права, и только на 14-ой ступени услуги нумераціи въ дѣлѣ производства первыхъ двухъ дѣйствій выдвигаются на первый планъ. Во всемъ своемъ значеніи нумерація выступаетъ только въ курсѣ 2-го года, и противъ этого пробѣла въ курсѣ 1-го года нельзя ничего сдѣлать, въ виду особенныхъ условій нашей начальной школы, не допускающихъ усвоенія учениками, въ первый же годъ обученія, всей ариѳметики цѣлыхъ (отвлеченныхъ и именованныхъ) чиселъ. Услуги десятичной системы хорошо оттѣняются также при сложеніи и вычитаніи на торговыхъ (такъ наз. „русскихъ“) счетахъ.

Способы рѣшенія задачъ.

§ 22. Что касается способовъ рѣшенія задачъ въ первый годъ обученія, то учителю надо точно различать слѣдующіе случаи: а) Изъ простыхъ задачъ перваго рода (см. § 10 гл. II) тѣ, которыя содержатъ, въ своихъ условіяхъ и въ вопросѣ, прямое указаніе относительно требуемаго дѣйствія, надо рѣшать безъ всякой попытки къ объясненію причины, почему надо употребить то, а не иное дѣйствіе. Напр.: „я выпилъ сначала двѣ чашки чаю, а потомъ еще одну; сколько я всего выпилъ чаю?“ „на заборѣ сидѣло пять ласточекъ; изъ нихъ одна улетѣла; сколько осталось?“ „мальчикъ сложилъ кубики въ три кучки, по четыре кубика въ каждой; сколько всего кубиковъ онъ сложилъ въ кучки?“ „15 кубиковъ разложено въ 5 кучекъ, и во всѣхъ кучкахъ лежитъ поровну кубиковъ; сколько кубиковъ въ каждой кучкѣ?“ и т. п. б) Иногда

приходится ученику (и учитель долженъ его этому научить) замѣнить одно или болѣе выраженій другими для того, чтобы простая задача второго или даже перваго рода настойчивѣе потребовала производства того или иного дѣйствія. Напр.: „ученикъ съ учителемъ разрѣшилъ двѣ задачи и самъ, безъ помощи учителя, три; сколько онъ разрѣшилъ задачъ?“—здѣсь пропущены слова: „еще“ и „всего“. Другой примѣръ: „у мальчика было, когда онъ ушелъ изъ дому, четыре пера; одно онъ подарилъ товарищу; сколько перьевъ онъ принесъ домой обратно?“ — здѣсь вмѣсто слова „осталось“, употреблено выраженіе: „принесъ домой“, и т. д. Въ подобныхъ задачахъ учитель тоже не долженъ спрашивать ученика о томъ,—почему надо сложить, или вычесть, или умножить и т. п., а только о томъ—*какъ ученикъ разсудилъ* предложенный вопросъ. в) При рѣшеніи простыхъ задачъ второго рода, отъ ученика можно требовать объясненія значенія словъ и полнаго разсужденія. Напр.: „у меня было нѣкоторое число карандашей; изъ нихъ я четыре отдалъ своимъ дѣтямъ, а три у меня осталось; сколько у меня было карандашей?“ Ученикъ можетъ разсуждать такъ: „то, что вы отдали дѣтямъ, у васъ было; кромѣ того, у васъ еще осталось три карандаша, они, стало-быть, у васъ тоже были съ самаго начала“ и т. п. „У меня меньше, чѣмъ у брата моего, на 2 рубля, а у брата—7 рублей; сколько у меня денегъ?“ Ученикъ долженъ разсудить—что это значитъ „меньше, чѣмъ у брата, на 2 рубля“ и т. п. „Сколько надо прибавить къ 7-ми, чтобы получить 9?“ Ученикъ можетъ разсудить (не только угадать), что къ 7-ми надо прибавить 2 для того, чтобы получить 9, слѣдующимъ образомъ: „къ 7-ми надо что-то прибавить, чтобы получить 9; стало-быть, въ 9-ти содержится и 7, и еще какое-то число; чтобы узнать, какое еще число содержится въ 9-ти, надо отъ девяти отдѣлить 7“, и т. д. г) Только къ концу перваго года обученія возможно добиться отъ учениковъ не только разгадки вопроса, но и нѣкотораго уразумѣнія ариѳметической стороны въ задачахъ слѣдующихъ видовъ *):

$8+?=12$; рѣш.: $12-8=4$; $?+5=7$; рѣш.: $7-5=2$;
$8-?=6$; рѣш.: $8-6=2$; $?-3=9$; рѣш.: $9+3=12$;
$8\times?=16$; рѣш.: $16:8=2$; $?\times 6=18$; рѣш.: $18 \mid 6=3$;
$15 \mid ?=3$; рѣш.: $15 \;\; 3=5$; $? \mid 2=10$; рѣш.: $10\times 2=20$;
$15:?=3$; рѣш.: $15 \mid 3=5$; $?:2=10$; рѣш.: $2\times 10=20$.

*) Задачи, приведенныя въ первыхъ двухъ строчкахъ, можно разрѣшать не ранѣе 8-ой, а послѣднихъ трехъ строкъ—не ранѣе 13-ой ст.

д) Задачи болѣе или менѣе сложныя, но отнюдь не трудныя, ученики должны разрѣшать исключительно *синтетически*, т. е. исходя изъ условій задачи и отъ нихъ переходя къ вопросу ея, а не обратно, т. е. не аналитически. Поэтому сложныя задачи въ первый годъ должны предлагаться только приведенныя, которыя сами собою распадаются на нужныя, для ихъ рѣшенія, простыя задачи. Ниже, въ главѣ VI-ой, приведены въ должную связь и изъяснены оба способа рѣшенія сложныхъ задачъ: синтетическій и аналитическій. Дабы не повторять одного и того же дважды, здѣсь ни синтетическій, ни тѣмъ болѣе—аналитическій, способы не объяснены. Достаточно замѣтить, что изъ задачъ (№ 95 „Задачника для уч—лей“ и № 96 „Задачника для уч—ковъ“) труднѣйшія могутъ быть слѣдующаго вида:

„Пудъ сахару стоитъ 5 рублей, а пудъ кофе 20 руб.; куплено 4 пуда сахару и одинъ пудъ кофе; сколько истрачено денегъ?“—Трудность ея состоитъ въ томъ, что рядомъ съ цѣною пуда сахару не замѣчено, что такого сахару куплено 4 пуда, а приведено другое условіе относительно стоимости пуда кофе. Какъ только условія будутъ вѣрно перетасованы, задача сама распадется на двѣ: что стоятъ 4 пуда сахару и что вмѣстѣ стоятъ 4 пуда сахару и одинъ пудъ кофе?

„За 6 дней столярный подмастерье получаетъ 8 рублей; какъ велико его мѣсячное жалованье?“—Трудность задачи въ томъ, что не сказано—сколько дней въ мѣсяцѣ, и для устраненія этой трудности ученикъ долженъ передѣлать задачу въ слѣдующую (разница отмѣчена разгонистымъ шрифтомъ): „за 6 дней подмастерье получаетъ 8 руб.; *въ мѣсяцѣ 30 дней; что подмастерье получитъ за мѣсяцъ?*“ Какъ только это сдѣлано, задача распадается на двѣ: сколько разъ 6 дней содержатся въ 30-ти дняхъ и что подмастерье получитъ за 5 разъ повторившіеся 6 дней?

„Нѣкто изъ 36-ти рублей на книги истратилъ четвертую долю, на писчебумажныя принадлежности — одну девятую долю остатка, на остальныя же деньги купилъ себѣ пару платья; во что ему обошлась пара?“—Здѣсь трудность только въ переводѣ дробныхъ данныхъ на языкъ дѣйствій, т. е. надо сдѣлать такъ, чтобы ученики поняли, что для отысканія четверти 36-ти, надо 36 раздѣлить на 4 одинаковыя части, и т. д. А когда это сдѣлано, ученики легко разрѣшатъ задачу. При этомъ слѣдуетъ пріучить учениковъ къ записи какъ этой, такъ и остальныхъ задачъ строчками, напр., такъ:

1) 36 р. | 4 = 9 р. на книги.
2) 36 р. — 9 р. = 27 р. остатокъ.
3) 27 р. | 9 = 3 р. на бумагу и пр.
4) 9 р. + 3 р. = 12 р. всего истр.
5) 36 р. — 12 р. = 24 р. на платье.

Отв. На платье 24 рубля.

Неумѣстность аналитическаго способа. Стремиться къ тому, чтобы ученики въ первый же годъ обученія занимались рѣшеніемъ задачъ болѣе трудныхъ и не приведенныхъ и усвоили себѣ также аналитическій пріемъ рѣшенія задачъ, рѣшительно не слѣдуетъ. Какъ мы увидимъ ниже, аналитическій пріемъ рѣшенія задачъ требуетъ отъ учениковъ не только большого разумѣнія, но также весьма значительной власти и надъ рѣчью, и надъ собственной мыслью. Мысль учениковъ при этомъ способѣ рѣшенія, должна, но не можетъ твердо держаться перехода отъ вопроса задачи къ цѣлому ряду другихъ, логически необходимыхъ для его разрѣшенія, вопросовъ,—перехода, совершенно чуждаго не только привычкамъ мышленія, но даже и самому пониманію малолѣтнихъ учениковъ перваго отдѣленія. Поэтому-то задачи, умѣстныя въ первый годъ обученія, и не должны требовать примѣненія такого могущественнаго орудія, какъ аналитическій пріемъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ.

Умѣнія, какъ цѣль курса 1-го года. Курсъ перваго года обученія долженъ, такимъ образомъ, быть особенно простъ и долженъ дать ученикамъ только главнѣйшія ариѳметическія представленія и связанныя съ ними основныя чисто-ариѳметическія умѣнія: а) умѣніе производить дѣйствія въ объемѣ таблицъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, и б) умѣніе производить первыя два дѣйствія надъ числами трехзначными.

Условія выполнимости курса. Дабы возможно было проработать этотъ курсъ въ теченіе одной учебной зимы, необходимы слѣдующія условія: а) въ курсѣ не должны встрѣчаться ни задачи замысловатыя, ни задачи, требующія болѣе трехъ-четырехъ дѣйствій; б) задачи должны отличаться жизненностью условій и усложняться постепенно; в) не должно придавать никакого значенія опредѣленіямъ и правиламъ; г) самостоятельныя упражненія должны тѣсно примыкать къ усвоенному подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя; д) требованій наглядности и постепенности учитель не вправѣ забывать ни на минуту.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Второй годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ.

Ступени курса 2-го года. § 1. Курсъ ариѳметики, подлежащій проработкѣ въ теченіе перваго года обученія, распадается, какъ мы это видѣли раньше, на четырнадцать ступеней. Курсъ же второго года распадается на одиннадцать: 1) нумерація во всемъ ея объемѣ; 2) умноженіе двузначнаго и многозначнаго числа на однозначное; 3) дѣленіе двузначнаго на однозначное въ случаѣ, дающемъ въ частномъ число двузначное же; 4) дѣленіе многозначнаго числа на однозначное; 5) умноженіе на одну единицу какого-либо разряда и на нѣкоторое однозначное число единицъ одного какого-либо разряда; 6) умноженіе многозначнаго числа на многозначное же; 7) раздробленіе и вычитаніе именованныхъ чиселъ; 8) дѣленіе многозначнаго числа на однозначное число единицъ высшаго разряда; 9) дѣленіе на закруглимое число; 10) дѣленіе на незакруглимое двузначное и многозначное число; 11) дѣленіе на многозначныя числа вообще и превращеніе именованныхъ чиселъ.—Ниже счетъ ступеней курса поставленъ въ зависимость отъ четырнадцати ступеней курса перваго года обученія, такъ что первая ступень курса второго года является пятнадцатою ступенью всего курса.

15-ая ступень: нумерація. § 2. Эту, пятнадцатую, ступень курса ариѳметики составляетъ счисленіе, т. е. нумерація по десятичной системѣ,—но во всемъ ея объемѣ. Въ основѣ нумераціи вообще лежитъ только мысль о томъ, что отношеніе единицы одного разряда къ единицѣ слѣдующаго равно десяти. Но какъ только мы переходимъ отъ письменнаго счисленія къ счисленію устному, то появляется необходимость разбить число также и на классы. Такимъ образомъ, въ основѣ устной нумераціи по десятичной системѣ лежатъ, строго говоря, двѣ мысли: 1) о десятичномъ отношеніи единицъ смежныхъ разрядовъ, и 2) о необходимости введенія нѣкотораго единообразія въ группировкѣ разрядныхъ чиселъ, т. е. о необходимости введенія классовъ: единицъ, тысячъ, милліоновъ, билліоновъ и т. д. Съ первою мыслью дѣти достаточно свыклись, имѣя дѣло съ трехзначными числами. Вторая же проявляется, хотя сначала и въ не довольно

рѣзкой формѣ, съ переходомъ отъ трехзначныхъ чиселъ къ четырехзначнымъ. Та послѣдовательность, какой должно держаться при ознакомленіи дѣтей съ единицами первыхъ трехъ разрядовъ, на дальнѣйшихъ ступеняхъ уже не цѣлесообразна, такъ какъ, при обозначеніи тысячъ, милліоновъ и т. д., примѣняются то же правило и тѣ же словесныя обозначенія, съ которыми связано обозначеніе трехзначныхъ чиселъ. Говоря иначе, дѣти должны понять: 1) что придумывать все новыя и новыя названія для единицъ еще не извѣстныхъ имъ разрядовъ (они знаютъ только разряды единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ) было бы очень неудобно, и 2) что эти неудобства устранены, благодаря тому, что число тысячъ считается такъ же, какъ считается любое число единицъ перваго разряда, меньшее тысячи, и что поэтому съ помощью цифръ принято обозначать число тысячъ на тѣхъ же точно основаніяхъ, на какихъ обозначаются числа перваго класса. Для того, чтобы дѣти поняли единообразіе въ обозначеніи цифрами единицъ различныхъ классовъ, ихъ весьма полезно пріучить къ отдѣленію тысячъ отъ сотенъ промежуткомъ шириною въ одну цифру. Не надо только торопиться съ переходомъ къ обозначенію шестизначныхъ чиселъ.

Но, кромѣ того, учитель долженъ обратить вниманіе на то, идетъ ли у учениковъ умѣніе обозначать многозначныя числа письменно, съ помощью цифръ, вполнѣ рука-объ-руку съ пониманіемъ и знаніемъ нумераціи изустной. Дабы ученики не механически только усвоили письменную нумерацію, необходимо заставлять ихъ считать въ предѣлахъ чиселъ, которыя близки къ переходу отъ единицъ одного разряда къ единицамъ слѣдующаго, и вообще въ тѣхъ случаяхъ, когда отъ прибавленія небольшого числа единицъ получаются новыя единицы счета: 298, 299, 300, 301...., 996, 997, 998, 999, 1000, 1001...., 2398, 2399, 2400, 2401...., 10997, 10998, 10999, 11000, 11001...., и т. п. То же самое правило должно быть соблюдаемо и на 14-й ступени, а также на 10-й. (Упражненія этого рода для каждой изъ этихъ ступеней намѣчены въ соотвѣтствующихъ №№ „Задачника для уч—лей“. Для 15-ой ступени они намѣчены въ №№ 115 и 117 этого „Задачника“, причемъ № 117 посвященъ обозначенію сотенъ тысячъ. №№ же 116 и 118 „Задачника для уч—ковъ“ отведены самостоятельнымъ работамъ учениковъ въ письменной нумераціи и требуютъ отъ учителя очень большого вниманія; № 119 въ „Задачникѣ для уч—лей“ посвященъ милліону). О

величинѣ милліона ученики должны получить представленіе, что число это чрезвычайно велико. Для этой цѣли могутъ служить, напр., слѣдующіе примѣры: въ году минутъ счетомъ всего 525600, т. е. немного болѣе полумилліона; отъ Рождества Христова до настоящаго времени прошло гораздо меньше одного милліона дней; чтобы пройти 1 000 000 верстъ, надо итти 55 лѣтъ безъ малаго, если проходить по 5 верстъ въ часъ и ежедневно ходить по десяти часовъ.—Очень полезно сообщить дѣтямъ подобныя свѣдѣнія даже въ томъ случаѣ, когда они еще не въ состояніи провѣрить этихъ данныхъ. Но еще полезнѣе возвратиться къ нимъ, когда дѣти уже умѣютъ умножать и дѣлить многозначныя числа. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ полезно вычислить съ ними: какую длину займетъ одинъ милліонъ пятачковъ, если пятакъ положить къ пятаку—все въ одномъ направленіи? какой высоты столбикъ образуется, если положить одинъ милліонъ пятачковъ или какихъ-нибудь другихъ одинаковыхъ мѣдныхъ монетъ другъ на дружку? и т. п.—Когда дѣти вполнѣ усвоили себѣ способъ обозначенія четырехъ, пяти и шестизначныхъ чиселъ, ихъ можно ознакомить также съ милліонами.

Условія письменнаго производства сложенія и вычитанія.

Послѣ этого могутъ пойти упражненія учениковъ въ сложеніи и въ вычитаніи многозначныхъ чиселъ, къ которому можно перейти, миновавъ, если того потребуетъ низкій уровень класса, нумерацію милліоновъ. Но учитель при этомъ ни на минуту не долженъ забывать, что безъ упоминаемыхъ выше (§ 18 гл. IV) таблицъ сложенія однозначныхъ чиселъ съ однозначными же и съ двузначными нѣтъ письменнаго производства сложенія, а безъ таблицы вычитанія однозначныхъ чиселъ изъ однозначныхъ же и изъ двузначныхъ, дающаго въ остаткѣ меньше десяти, нѣтъ письменнаго производства вычитанія. Ученики равнымъ образомъ не должны забывать, что вся ихъ сила въ знаніи таблицъ сложенія и вычитанія.

Значеніе десятичной системы счисленія.

Кромѣ того, должно всегда помнить, что всѣмъ своимъ современнымъ развитіемъ ариѳметика обязана исключительно обозначенію чиселъ помощью десяти цифръ по десятичной системѣ,—мыслью, которою человѣчество обязано, вообще мало содѣйствовавшимъ развитію образованности въ родѣ человѣческомъ, индусамъ. Одинъ изъ величайшихъ математиковъ начала минувшаго столѣтія, Лаплась (ум. въ 1827 г.), говоритъ о значеніи этого изобрѣтенія въ

слѣдующихъ восторженныхъ выраженіяхъ: „Мысль обозначенія чиселъ помощью десяти знаковъ, основаннаго на безусловномъ и мѣстномъ значеніи цифръ, такъ проста, что только по этой причинѣ мы забываемъ—какого она достойна удивленія. Но именно эта простота и та легкость, которою ей обязано ариѳметическое вычисленіе, дѣлаютъ ариѳметическую систему индусовъ однимъ изъ полезнѣйшихъ изобрѣтеній. Насколько трудно было изобрѣтеніе этой системы, можно судить по тому, что ея не могли изобрѣсти ни Архимедъ, ни Аполлоній Пергейскій, принадлежащіе къ числу величайшихъ людей древности“ *). Все значеніе этого великаго изобрѣтенія постигается только при сознательномъ производствѣ всѣхъ дѣйствій. Но даже на 15-й ступени дѣтямъ должно быть указано—какъ важенъ нуль при обозначеніи чиселъ и какъ ясно обозначеніе чиселъ съ помощью арабскихъ цифръ по сравненію съ цифрами римскими и церковно-славянскими. Учитель долженъ уже на этой ступени обученія привить ученикамъ не только сознаніе, но даже прямо чувство благоговѣнія предъ тѣмъ благодѣяніемъ, которое человѣку оказываетъ десятичный способъ счисленія вмѣстѣ съ десятью арабскими цифрами. Если учитель этого не сумѣлъ сдѣлать во-время, то онъ сдѣлалъ вообще немного для возбужденія истиннаго интереса къ прохожденію учениками дальнѣйшихъ ступеней обученія.

Торговые счеты.

Наглядным, наиболѣе полезнымъ на этой ступени, пособіемъ являются русскіе торговые счеты. на которыхъ вычисленіе суммъ и разностей хотя и ближе къ вычисленію изустному, но тѣмъ не менѣе выясняетъ ученикамъ то основное свойство разумнаго вычисленія, по которому всякое вычисленіе совершается только надъ отдѣльными разрядами. Вычисленію суммъ и разностей на счетахъ, во второй годъ обученія, должно учить учениковъ неустанно и систематически. Это полезно не только въ практическомъ отношеніи.

*) Архимедъ, какъ извѣстно, вѣрно вычислилъ число песчинокъ, которое заключалось бы въ шарѣ, составленномъ изъ песчинокъ и имѣющемъ въ поперечникѣ удвоенное разстояніе отъ земли до солнца, и при этомъ пользовался составленными имъ десятичными единицами высшихъ разрядовъ. Однако-же, до десятичной нумераціи съ помощью десяти цифръ этотъ великій геометръ не додумался. Ср. А. В. Васильева: „Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ“. Казань 1891 года.

Изустное сложеніе.

На этой же, 15-ой, ступени курса, ученики должны хорошенько укрѣпиться въ производствѣ изустнаго сложенія и вычитанія однозначныхъ и двузначныхъ чиселъ, попытаться сложеніе и вычитаніе трехзначныхъ чиселъ сдѣлать изустно и усвоить себѣ нѣкоторыя полезныя, при письменномъ производствѣ сложенія и вычитанія, привычки. Такъ, напр., безусловно дурна привычка нѣкоторыхъ учителей и ихъ учениковъ при сложеніи, напр., чиселъ 8, 7, 6 и 4 производить вслухъ это сложеніе слѣдующимъ образомъ: 8 да 7 пятнадцать, 15 да 6 двадцать одинъ, 21 да 4 двадцать пять. Дурно при этомъ, что они промежуточныя суммы называютъ по два раза. Гораздо лучше дѣлать это такъ: 8 да 7—пятнадцать, да 6—двадцать одинъ, да 4—двадцать пять. Еще лучше, не называя каждаго новаго слагаемаго и переходя отъ одного слагаемаго къ слѣдующему, произносить только полученныя суммы. Въ нашемъ примѣрѣ это приведетъ къ слѣдующимъ словамъ: восемь, пятнадцать, двадцать одинъ, двадцать пять. При этомъ ученикъ можетъ указывать мѣломъ или пальцемъ на каждое новое слагаемое, которое онъ прибавляетъ къ полученной уже суммѣ. Но это, понятно,—конечная цѣль, которая достижима лишь послѣ многочисленныхъ упражненій въ этомъ направленіи.—Полезна, какъ и на другихъ ступеняхъ обученія, также и на этой ступени, „Таблица для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“. — Само собою разумѣется, что не слѣдуетъ также упускать изъ виду умѣнія дѣтей складывать шопотомъ и про себя.—Что же касается привычки приписывать къ столбцу цифръ десятковъ, сотенъ или другихъ разрядовъ также и цифру того же разряда, полученную при сложеніи единицъ низшаго разряда, то отъ нея слѣдуетъ постепенно отучать дѣтей, хотя еще лучше, если они ея себѣ вовсе не усваиваютъ. Вычисленіе учениками суммъ про-себя полезно только для того, чтобы въ классѣ, при выполненіи дѣтьми самостоятельныхъ работъ, не было слишкомъ шумно. Но для дѣла полезнѣе, если дѣти учатся производить всѣ вычисленія хотя бы шопотомъ, но все-таки вслухъ. Это укрѣпляетъ ихъ и въ знаніи таблицъ, и въ толковой работѣ и не столь сильно утомляетъ ихъ вниманіе.

Иной способъ сложенія.

Крайне полезно научить дѣтей тому способу производства сложенія многозначныхъ чиселъ, при которомъ сначала складываются единицы, и итогъ полностью записывается гдѣ-нибудь въ сторонѣ; затѣмъ складываются десятки и полная сумма (съ нулемъ) обозначается подъ прежде записанною суммою, и т. д. Въ особенности полезно составлять подобную запись частныхъ суммъ въ случаяхъ, если дано очень много слагаемыхъ. Тогда въ итогѣ сложенія единицъ какого-либо разряда могутъ получиться не только десятки этихъ единицъ, но даже сотни ихъ, которыя удержать въ памяти

2 300	28
14 756	210
5 308	2 100
20 856	13 000
48	+ 30 000
+ 2 070	
45 338	45 338

затруднительно. Кромѣ того, это полезно въ томъ случаѣ, если предвидится надобность отрываться отъ дѣла, или если чувствуется, что итогъ одного изъ столбцовъ подведенъ невѣрно: тогда не приходится все начинать сначала.—Что касается вычитанія, то при раздробленіи единицы высшаго разряда въ единицы ближайшаго низшаго, надъ цифрой высшаго разряда надо пріучить дѣтей къ тому, чтобы они всегда ставили значекъ, точку, для того, чтобы не забыть, что въ этомъ разрядѣ одною единицею меньше. Точку эту лучше ставить надъ цифрами, чѣмъ между ними.

16-ая ст.: умноженіе на однозначное число. § 3. Во второй годъ можно въ такомъ случаѣ, тотчасъ послѣ нумераціи и упражненій въ первыхъ двухъ дѣйствіяхъ, приступить къ умноженію двузначнаго, трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное. (Сюда относятся № 126 „Задачника для учителей“ и № 127 „Задачника для уч—ковъ“). Большихъ методическихъ трудностей эта ступень (счетомъ шестнадцатая) не представляетъ, и большую услугу оказываетъ приведеніе умноженія къ сложенію равныхъ слагаемыхъ. Начинать слѣдуетъ, конечно, съ тѣхъ случаевъ, когда каждое частное произведеніе — число однозначное. На этой же ступени надо усердно упражнять дѣтей въ перестановкѣ обоихъ сомножителей, если второй — многозначное, а множимое — однозначное число. За-то, тѣмъ значительнѣе трудности слѣдующихъ (семнадцатой и восемнадцатой) ступеней, для преодолѣнія которыхъ требуются строгая методичность и постепенный переходъ отъ чиселъ двузначныхъ къ трехзначнымъ, отъ этихъ послѣднихъ—къ четырехзначнымъ, и т. д.

17-ая ст.: дѣленіе двузн. числа на однозначное. § 4. Семнадцатую ступень составляетъ дѣленіе двузначныхъ чиселъ на однозначныя. Чѣмъ лучше дѣти усвоятъ способъ производства дѣленія двузначнаго числа на однозначное въ случаяхъ, дающихъ въ результатѣ число двузначное, тѣмъ, конечно, легче имъ будетъ преодолѣніе остальныхъ трудностей этой ступени. Поэтому на указанный случай должно обратить особенное вниманіе. Дѣло въ томъ, что въ первый годъ обученія дѣти научились такому изустному раздѣленію двузначнаго числа на однозначное, которое сводится къ болѣе или менѣе непосредственной помощи данныхъ таблицы умноженія. Поэтому они, будучи въ состояніи раздѣлить довольно большое двузначное число, напр., 74, на другое крупное число, напр., на 8 или на 9, затрудняются письменно раздѣлить небольшое, сравнительно, число, напр., 38 или 34, на другое небольшое, напр.,

на 2, или 45 и 48 на 3, и т. д. Къ этимъ случаямъ дѣти не умѣютъ прилагать изустнаго пріема дѣленія (а строго-письменнаго они еще не знаютъ, да онъ и не цѣлесообразенъ на этой ступени). Поэтому ихъ, прежде всего, должно научить раздѣленію двузначнаго числа на однозначное, дающему въ результатѣ болѣе десяти. Это и есть семнадцатая ступень обученія. При этомъ учащій не долженъ забывать, что не только при выясненіи самаго смысла дѣйствія дѣленія, но даже при производствѣ этого дѣйствія, онъ долженъ строго отличать дѣйствіе дѣленія на извѣстное число частей отъ дѣйствія кратнаго сравненія. На этой ступени дѣти, конечно, еще не могутъ выработать себѣ точнаго понятія о причинѣ, почему каждый изъ этихъ случаевъ можетъ быть логически приведенъ къ другому изъ нихъ. (Сюда относятся упражненія подъ № 129 „Задачника для учителей“ и №№ 130 и 131 „Задачника для уч—ковъ“). А потому лучше этого вопроса не трогать.

Запись дѣленія на однозначное число. Дѣленіе двузначнаго на однозначное число при двузначномъ частномъ должно производиться: 1) изустно и 2) безъ записи частныхъ произведеній. А именно такъ: пусть требуется найти 57 | 3; въ такомъ случаѣ учащійся долженъ разсчитать, что 30 единицъ, по раздѣленіи на 3 части, дадутъ 10, а остальныя 27, по раздѣленіи на 3, дадутъ 9; итого получится 19. Другой примѣръ: 96 | 4; точно также учащійся долженъ сначала раздѣлить 80 на 4 части, а потомъ 16 на 4 части. Пріучать учениковъ къ многописанію въ этомъ случаѣ вредно, а потому въ высшей степени нецѣлесообразно и самому писать, и дѣтямъ дозволять записи въ родѣ, напр., слѣдующихъ (къ сожалѣнію, кое-гдѣ принятыхъ):

57	3	= 19	или	96	4	= 24
— 3				— 8		
27				16		
— 27				— 16		
0				0		

Ставить въ случаяхъ, когда остатокъ равенъ нулю, ковычки, какъ это дѣлаютъ очень многіе, тоже не слѣдуетъ, такъ какъ этотъ знакъ въ математикѣ значенія не имѣетъ и почему-то только въ ариѳметикѣ укоренился. Но этотъ недостатокъ записи менѣе суще-

ственѣнъ, чѣмъ вообще подробная запись вычисленія. Кромѣ дѣлимаго, дѣлителя, частнаго, остатка, если таковой послѣдній есть, и знаковъ дѣйствія и равенства, ничего болѣе въ этомъ случаѣ писать не должно. Если дѣленіе даетъ остатокъ, то это записываютъ такъ:

$$78 \mid 4 = 19 \text{ (ост. 2)}.$$

При этомъ не надо говорить, что 4 въ семи содержится одинъ разъ, а надо говорить такъ: 4 десятка раздѣлить на 4 одинаковыя части, получимъ 1 десятокъ въ частномъ; не раздѣленныхъ останется 38 единицъ; 36 раздѣлимъ на 4 одинаковыя части, въ частномъ получимъ еще 9 отдѣльныхъ единицъ, и т. п. Когда приходится дѣлать кратное сравненіе:

$$78 : 4 = 19 \text{ (ост. 2)},$$

то тоже не надо говорить такъ, какъ это выше замѣчено, а слѣдующимъ образомъ: 4 единицы въ 4-хъ десяткахъ, или въ сорока единицахъ, содержится одинъ десятокъ разъ, и т. д. Предоставляется благоусмотрѣнію учителя рѣшеніе вопроса, не умѣстнѣе ли на этой ступени, чѣмъ на 12-й, ознакомленіе дѣтей съ обозначеніемъ частнаго въ видѣ цѣлаго числа съ дробью, если при раздѣленіи числа получается остатокъ, меньшій дѣлителя. Можно ограничиться, для начала, случаемъ, когда остатокъ равенъ одной единицѣ. Но посѣять въ умѣ учениковъ начатки этого представленія можно и слѣдуетъ на 12-ой ступени. Не надо думать, что всякое ученіе должно быть даваемо сразу въ законченномъ видѣ: къ нему можно и должно возвращаться.

Дробь какъ частное. Во всякомъ случаѣ, упомянутый выше способъ обозначенія частнаго въ видѣ дроби въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлимое меньше дѣлителя, легко выяснить ученикамъ только въ случаѣ дѣленія числа на извѣстное число равныхъ частей, и только при соблюденіи слѣдующихъ трехъ условій: 1) Прежде всего, должно взять такія дѣлимыя и такихъ дѣлителей, чтобы въ остаткѣ получалась единица. Что единица, раздѣленная на двѣ равныя части, даетъ въ частномъ одну половину, что раздѣленная на три равныя части, она даетъ одну треть, на четыре — одну четверть, дѣти усваиваютъ очень легко. Не трудно также усвоеніе ими случаевъ, когда дробь равна $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ и т. д. 2) Гораздо труднѣе зато усвоеніе ими того, что 3 и 4 единицы, раздѣленныя на 5, 6, на 7 и т. д. частей, даютъ въ частномъ дроби $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$ и т. д. Къ выясненію этого и должно приступить съ нѣкоторыми предосторожностями, и первоначально остатокъ долженъ равняться 2-мъ единицамъ при различныхъ дѣлителяхъ, потомъ 3-мъ единицамъ, и т. д. 3) Выясненіе того, что частное, происходящее отъ раздѣленія 2-хъ на 3 равныя части, равняется двумъ третямъ одной единицы, можетъ и должно опираться на наглядные примѣры, исходя изъ того соображенія, что вмѣсто того, чтобы раздѣлить сразу 2 единицы на 3 равныя части, можно сначала раздѣлить одну изъ этихъ единицъ на 3 равныя части, а потомъ и другую. — Во всякомъ случаѣ непосредственная цѣль семнадцатой ступени обученія заключается не въ выясненіи намѣченныхъ выше ученій объ образованіи дроби при раздѣленіи одного числа на нѣсколько равныхъ частей, а главнымъ образомъ—въ пріученіи дѣтей къ послѣдовательному дѣленію каждаго изъ разрядовъ дѣлимаго на всего однозначнаго дѣлителя.

§ 5. Восемнадцатая ступень обученія содержитъ дѣленіе трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное. Основной пріемъ и основная мысль письменнаго производства дѣйствія въ случаѣ многозначнаго дѣлимаго—тѣ же, что въ случаѣ дѣлимаго двузначнаго, дающаго, при раздѣленіи на даннаго дѣлителя, двузначное же частное. А потому, особенныхъ и новыхъ трудностей, за исключеніемъ двухъ, на восемнадцатой ступени обученія ариѳметикѣ уже не представляется. Здѣсь новыя трудности, вслѣдствіе которыхъ этотъ случай дѣленія отнесенъ къ отдѣльной ступени, заключаются въ слѣдующемъ: 1) иногда приходится для опредѣленія первой цифры частнаго взять двѣ цифры дѣлимаго и 2) въ частномъ одна или нѣсколько среднихъ цифръ могутъ быть нулями.

Дѣленіе многозначнаго на однозначное число.

Расположеніе вычисленій въ случаѣ дѣленія многозначнаго числа на однозначное должно быть, по возможности, просто,—безъ записи остатковъ и частныхъ произведеній. Напр., вычисленіе $8785 \mid 5$ должно быть сдѣлано изустно: 5000 раздѣлимъ на 5 частей, получимъ 1000; останутся нераздѣленныя 3 тысячи; обратимъ ихъ въ сотни (размѣняемъ на сотни): получится 30 сотенъ, да еще 7 сотенъ, будетъ 37 сотенъ; раздѣлимъ 35 сотенъ на 5 частей, получимъ 7 сотенъ, и т. д.—все изустно! И записывать должно только частныя. Но можно сдѣлать дѣленія и по слѣдующимъ образцамъ:

а)
$$\begin{array}{r|l} 8785 & 5 = 1757 \\ 3700 & \\ 280 & \\ 35 & \end{array}$$
и б)
$$\begin{array}{r|l} 8785 & 5 = 1757 \\ 37 & \\ 28 & \\ 35 & \end{array}$$

Записывать же всѣ частныя произведенія не слѣдуетъ ни въ какомъ случаѣ, т. е. не слѣдуетъ выполнять вычисленіе такъ:

```
 8785 | 5=1757
— 5   |
  37
— 35
  28
— 25
  35
— 35
   0
```

Ибо подобное вычисленіе—образчикъ того многописанія и рабскаго слѣдованія одному правилу, которыя дѣлаютъ изъ ариѳметики предметъ, наводящій тоску и скуку, являющіяся слѣдствіемъ безсмысленнаго слѣдованія многочисленнымъ правиламъ многописанія. Эти правила разсчитаны на потребности человѣка, производящаго дѣленіе на многозначное число, со значащими цифрами. Единственное, что дозволительно и часто даже полезно, это—снабженіе цифры частнаго начальной буквою имени записываемаго разряда, напр.: 1 т. 7 с. 5 д. 7 е. Но и эта буква излишня сама по себѣ и важна лишь въ методическомъ отношеніи, каковой важности вовсе не представляетъ записываніе частныхъ произведеній. На этой ступени, какъ и на всѣхъ остальныхъ, строго надо различать собственно дѣленіе и кратное сравненіе. (№№ 132 и 134 „Задачника для учителей“ содержатъ только письменныя упражненія, подобранныя такъ, что дѣлимыя—некруглыя многозначныя числа, № 133 „Задачника для уч—ковъ“, напротивъ, содержитъ сначала примѣры, въ которыхъ дѣлимыя—круглыя числа, и только въ № 135 этого послѣдняго задачника идутъ самостоятельныя упражненія въ дѣленіи всякаго многозначнаго числа на однозначное. Это заставляетъ учениковъ, дѣйствительно, поработать болѣе или менѣе самостоятельно).— Случай, когда число цифръ частнаго меньше числа цифръ дѣлимаго, требуетъ только раздробленія единицъ высшаго разряда въ единицы ближайшаго низшаго. Тогда хорошо обратиться къ „размѣну“ (см. § 10 этой же главы) кредитныхъ билетовъ одного десятичнаго достоинства въ десять билетовъ ближайшаго низшаго десятичнаго достоинства. Тотъ же пріемъ пригодится въ случаѣ, когда среди цифръ частнаго есть нули. Для того, чтобы не повторять одного и того же нѣсколько разъ, этотъ внутренне-наглядный пріемъ выясненъ въ упомянутомъ параграфѣ одинъ только разъ.

Задачи съ условіями.

Не переходя къ проработкѣ содержанія 19-ой ступени, слѣдуетъ обратиться къ разрѣшенію съ дѣтьми ряда цѣлесообразныхъ сложныхъ задачъ, въ которыхъ они впервые знакомятся съ представленіями: о прибыли, убыткѣ, доходѣ валовомъ и чистомъ, о значеніи различныхъ кредитныхъ билетовъ, о единичныхъ отношеніяхъ дести къ листу, аршина—къ вершку,

сажени—къ аршину, фунта—къ лоту, часа—къ минутѣ, сажени—къ футу, фута и аршина—къ дюйму, версты—къ сажени, четверти—къ четверику (№№ 137—141). Обо всѣхъ мѣрахъ, за исключеніемъ версты, ученики должны составить себѣ совершенно ясное и наглядное представленіе, неоднократно обращаясь къ ихъ моделямъ. Много-ли учителей (не говоря уже объ ученикахъ) знаютъ высоту и поперечникъ четверика, вѣсъ карандаша, его обычную длину, число словъ, произносимыхъ обыкновенно въ минуту при вразумительномъ чтеніи, и т. п.? А между тѣмъ безъ этого знанія соотвѣтствующія представленія бѣдны и почти безсодержательны. Задачъ, сколько-нибудь трудныхъ для разрѣшенія, на этой ступени не встрѣчается и не должно встрѣчаться.

Умноженіе однозн. числа на многозн.

Иныя задачи требуютъ умноженія однозначнаго числа на многозначное. При рѣшеніи задачъ этого рода ученикамъ надо уяснить себѣ, что вмѣсто того, чтобы однозначное число умножать на многозначное, удобнѣе умножить это многозначное число на данное однозначное. Ходъ разсужденій слѣдующій: „чтобы узнать—сколько денегъ стоятъ 4696 четвертей ржи по 6 рублей за четверть, надо 6 рублей помножить на 4696, но это будетъ долго; разсчитаемъ это такъ: если бы за четверть было заплачено по 1 рублю, то всѣ 4696 четв. стоили бы 4696 р.; если бы было заплачено еще по рублю, было бы истрачено еще 4696 р.“ и т. д. Особенно предосудительно дозволять дѣтямъ невѣрныя въ самой основѣ своей разсужденія слѣдующаго рода: „одна четверть ржи стоитъ шесть рублей, а 4696 четв. стоятъ въ 6 разъ больше; поэтому надо 4696 умножить на 6“. Здѣсь не слѣдовало бы обращать вниманія на этотъ невѣрный способъ объясненія, если бы неоднократно не приходилось наблюдать подобныя „разсужденія“ въ очень многихъ случаяхъ учебной практики. Иной учитель думаетъ, что дѣти будто бы „поймутъ“ умноженіе однозначнаго числа на многозначное, если имъ сказать, что отъ умноженія единицъ на единицы получаются единицы, отъ умноженія же единицы на десятки—десятки, а отъ умноженія единицъ на сотни—сотни. Но практика показываетъ, что дѣти этого вовсе не понимаютъ. Это непониманіе объясняется, съ методической точки зрѣнія, тѣмъ, что умноженіе на нѣсколько единицъ какого-либо высшаго разряда относится до другой, значительно высшей, ступени обученія. Да и вообще сказать что-либо ученикамъ еще не значитъ—научить ихъ чему-нибудь и вызвать въ ихъ умѣ надлежащія представленія.

19-ая ступень. § 6. На девятнадцатой ступени обученія умѣстно ознакомленіе дѣтей съ умноженіемъ на одну или нѣсколько (менѣе десяти) единицъ любого разряда. Здѣсь надо не только показать учащемуся, что письменное производство умноженія всякаго числа на 10, на 100 и т. д. приводитъ къ приписанію нуля или нѣсколькихъ нулей къ письменному обозначенію множимаго, но и сдѣлать вполнѣ яснымъ почему это именно такъ, а не иначе. Наименѣе плодотворны при этомъ разсужденія о томъ, во что „обращаются“ единицы, десятки, сотни и т. д. при умноженіи ихъ на 10, 100 и т. д.

Множитель 10, 100, 1000 и т. д. Умноженіе на 10 можно вести такъ же, какъ умноженіе на однозначное число, т. е. съ помощью таблицы умноженія. Требуется умножить 27×10: десятью-семь 70, нуль пишу, 7 десятковъ въ умѣ, десятью-два 20 (десятковъ) да семь 27, получится 270. Такъ же надо умножать 385 на 10: десятью-пять 50, нуль пишу, 5 въ умѣ; десятью-восемь 80, да 5 восемьдесятъ пять, пять пишу, 8 въ умѣ; десятью-три 30, да 8 тридцать-восемь; получится 3 850. Можно (въ виду того, что 10 слагаемыхъ написать не много отниметъ времени) взять двузначное число, напр. 37, и написать это число 10 разъ (одно подъ другимъ), а дѣтей заставить складывать безъ помощи таблицы умноженія на 10 и съ помощью оной. Но во всякомъ случаѣ правило надо вывести помедливъ. Умноженіе однозначнаго числа на 100, на 1000 и вообще на единицу любого высшаго разряда, можно выяснить либо съ помощью перемѣщенія сомножителей ($4\times100=100\times4$, а $5\times1000=1000\times5$ и т. п.), либо же на основаніи умноженія любого числа на 10; т. е. $4\times100=40\times10$, $8\times100=80\times10$ и т. п. На перемѣщеніи сомножителей можно основываться и при умноженіи любого многозначнаго числа на 10: а) начнемъ съ двузначнаго числа, напр.: $23\times10=10\times23$; а 23 десятка все равно, что десять десятковъ (т. е. сто), да еще десять десятковъ (т. е. еще сто), да еще три десятка (т. е. тридцать),—всего двѣсти тридцать; б) перейдемъ къ умноженію трехзначнаго числа на 10, напр.: $238\times10=10\times238$; а 238 десятковъ все равно, что сто десятковъ (т. е. тысяча), да еще сто десятковъ (еще тысяча) и т. д. Такое освѣщеніе умноженія на 10 придаетъ не только вычисленіямъ, но и разумѣнію учениковъ, большую гибкость. Въ случаѣ низкаго уровня познаній въ классѣ можно придерживаться слѣдующаго порядка:

а) умноженіе однозначнаго числа на десять;

б) умноженіе десяти на десять (десять разъ десять все равно, что десять да десять да еще десять и т. д., пока не наберемъ десяти десятковъ, а десять десятковъ—сотня или сто);

в) умноженіе круглаго числа десятковъ на десять: 20×10 все равно, что двадцать разъ 10; но 20 разъ десять все равно, что десять разъ десять да еще десять разъ десять; 30×10 все равно, что 30 разъ десять, но тридцать разъ 10 все равно, что десять разъ десять да еще десять разъ десять да еще десять разъ десять, и т. д.; 80×10 все равно, что

$$10\times10+10\times10+10\times10+10\times10+10\times10+10\times10+10\times10+10\times10,$$ и т. д.

г) умноженіе ста на десять (десять разъ сто все равно, что десять сотенъ);

д) умноженіе однозначнаго числа сотенъ на десять; 200×10 все равно, что двѣсти разъ 10; но двѣсти разъ 10 все равно, что сто разъ десять да еще сто разъ десять; или 300×10 все равно, что 10 разъ триста, а это все равно, что 10 разъ сто да еще 10 разъ сто да еще 10 разъ сто, и т. д., и т. д.;

е) умноженіе трехзначнаго числа на 10; 467×10 все равно, что 10 разъ 467,—10 разъ сто—тысяча, а 10 разъ четыреста—**4 000**; 10 разъ десять — сто, а 10 разъ шестьдесятъ — **600**; 10 разъ семь—**70**, итого **4 670**.

Важность этихъ упражненій. Этотъ путь иногда, правда, медленно ведетъ къ цѣли, и гораздо быстрѣе ведетъ путь, по которому ученикъ умножаетъ на 10 точно такъ же, какъ онъ умножалъ на однозначное число. Если только-что приведены указанія другихъ пріемовъ, то только ради большей полноты въ проработкѣ той ступени, которая стоитъ во главѣ ученія объ умноженіи многозначныхъ чиселъ на многозначныя же. Учитель, который на этой ступени удерживаетъ учениковъ не достаточно долго, лишаетъ ихъ всякой возможности свободно, смѣло и сознательно двигаться дальше. Ибо кто безъ полнаго разумѣнія относится къ умноженію на одну единицу высшаго разряда, для того умноженіе многозначныхъ чиселъ на многозначныя, въ теченіе многихъ мѣсяцевъ и даже лѣтъ, не будетъ обладать достаточною степенью прозрачности и разумности. Въ лучшемъ случаѣ ученикъ будетъ вѣрно и быстро производить дѣйствіе умноженія, но разумныя основанія этого производства дѣйствія для него будетъ не ясно и даже не извѣстно. Ученіе же объ умноженіи вовсе не принадлежитъ къ тому матеріалу, который учениками долженъ быть усвоенъ на-

вѣру. Къ тому же опытъ показываетъ, что дѣти, сознательно, хотя и медленно, осилившія 19-ую ступень, въ дальнѣйшемъ курсѣ не останавливаются предъ дальнѣйшими трудностями. Эти послѣднія, наоборотъ, весьма сильно тормозятъ дальнѣйшее поступательное движеніе дѣтей, не обратившихъ, по винѣ учителя, достаточнаго вниманія на умноженіе чиселъ на 10, 100 и вообще на одну единицу высшаго разряда. (См. „Задачникъ для уч—лей“, № 143, а также „Задачникъ для уч—ковъ“, № 144.) Въ этомъ случаѣ медлительность окупается сторицею впослѣдствіи.

Множитель однозначное число ед. высш. разр.

Что касается умноженія на однозначное число десятковъ (на 20, 30, 40,.... 90) и на однозначное число сотенъ (200, 300, 400,... 900), то это умноженіе входитъ въ составъ той же 19-ой ступени. Здѣсь надо смотрѣть на умноженіе, какъ на ускоренное сложеніе одинаковыхъ слагаемыхъ,— тогда дѣти вскорѣ научатся понимать, что при умноженіи, на 40, надо множимое сначала помножить на десять, а полученное на 4 и т. д. Эта точка зрѣнія на умноженіе вовсе не допускаетъ чисто-отвлеченнаго разсужденія. Она должна быть нѣсколько разъ поставлена на почву наглядной записи, вродѣ, напр., слѣдующей, въ которой требуется 57 помножить на 30:

57
57
:
:
:
57 } 10 разъ

Эта запись вкратцѣ означаетъ то, что ученики съ учителемъ должны продѣлать вполнѣ хоть разъ, и вкратцѣ нѣсколько разъ, а именно: чтобы узнать сколько получится отъ сложенія тридцати слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое содержитъ 57 единицъ, можно сначала разсчитать, сколько будетъ 10 разъ 57, еще 10 разъ 57 и еще 10 разъ 57, а потомъ разсчитать, сколько получится отъ сложенія трехъ слагаемыхъ 570+570+570. Только тогда, когда ученики совершенно свободно дѣлаютъ подобные расчеты, можно надѣяться, что они поймутъ самую сущность умноженія на 30, 40, 50, 60..., на 200, 300, 400, и т. д., т. е. поймутъ что $28 \times 30 = 280 \times 3$; $76 \times 80 = 760 \times 8$; $87 \times 300 = 8\,700 \times 3$ и т. д.

57
57
:
:
:
57 } 10 разъ

Правилъ вначалѣ совсѣмъ не надо; а впослѣдствіи, когда дѣти сами ихъ подмѣтили, притомъ послѣ самостоятельныхъ работъ (№ 146 „Задачника для уч—ковъ“), можно дозволить ученикамъ это правило вывести, себѣ замѣтить и принять. Въ концѣ концовъ дѣти должны помножать, напр. 87 на 30, слѣдующимъ образомъ: 3-жды 0 (откуда нуль—понятно!) нуль, нуль пишу; 3-жды 7 двадцать одинъ, 1 пишу, 2 замѣчаю; 3-жды 8 двадцать четыре да 2—двадцать шесть, пишу 26; получаю

$$87 \times 30 = 2\,610.$$

Учитель долженъ помнить, что 19-ая ступень крайне важна не только для дальнѣйшихъ успѣховъ учениковъ въ умноженіи. Отъ несовершенствъ въ усвоеніи учениками того разумнаго основанія, которое служитъ для умноженія на многозначное число и которое составляетъ содержаніе девятнадцатой ступени, зависитъ и неуспѣшность занятій при умноженіи многозначнаго числа на многозначное, при производствѣ дѣленія, а въ особенности— при производствѣ кратнаго сравненія многозначныхъ чиселъ. Въ этихъ дѣйствіяхъ все время приходится умножать на однозначное число единицъ какого-либо высшаго разряда.

20-ая ступень.

§ 7. Что касается умноженія на многозначное число съ двумя или нѣсколькими значащими цифрами, составляющаго содержаніе 20-й ступени, то, если предыдущія двѣ ступени проработаны вполнѣ основательно, эта ступень обученія преодолѣвается сравнительно легко. Возможно и должно, ни разу не высказавъ никакого правила, достигнуть того, чтобы учащіеся вполнѣ уяснили и сознательно усвоили себѣ тѣ промежуточныя разсужденія, которыя впослѣдствіи приводятъ ихъ къ навыку и къ окончательному „правилу“ умноженія многозначнаго числа на многозначное. Порядокъ же и характеръ упражненій, которыя на этихъ ступеняхъ должны быть проработаны при непосредственной помощи учителя, очевидны и даны ниже (а также въ упражненіяхъ подъ № 147 „Задачника для уч—лей“ и подъ № 148 „Задачника для уч—ковъ“). Главнѣйшія трудности помянутой ступени обученія выше уже указаны. Къ счастію, путемъ цѣлесообразныхъ упражненій, въ основѣ которыхъ лежитъ тѣсная связь умноженія со сложеніемъ, учащихся вполнѣ возможно довести до пониманія всѣхъ тѣхъ пріемовъ, которыхъ уразумѣніе необходимо для вполнѣ сознательнаго производства умноженія многозначнаго числа на многозначное же. — Полезно при этомъ умноженіе на многозначное число (напр., на 479) производить не въ томъ порядкѣ, въ которомъ у насъ это дѣйствіе, къ сожалѣнію, принято производить, а въ прямо противоположномъ. Чтобы взять число слагаемыхъ 479 разъ, естественно раньше всего взять

его слагаемымъ четыреста разъ, затѣмъ уже—семьдесятъ разъ и, наконецъ, девять разъ, а не наоборотъ. Причина, по которой у насъ это дѣлается въ прямо противоположномъ направленіи, отчасти историческая, и во всякомъ случаѣ чисто внѣшняя, но при сознательномъ усвоеніи дѣтьми умноженія, легко устранимая. Когда среди внутреннихъ цифръ записи множителя есть нули, то, при общепринятомъ способѣ умноженія, нули „сносятся“ въ новое произведеніе, а при рекомендуемомъ выше способѣ — они приписываются къ предшествующей записи. Множителя записывать подъ множимое рѣшительно не для чего, а лучше записывать его рядомъ съ множимымъ, въ одну съ нимъ строку. Тогда, при указанномъ выше способѣ производства дѣйствія, не надо думать о томъ, куда записать множимое и множителя, чтобы какъ-нибудь не оказалось, что на доскѣ или на бумагѣ для послѣдняго частнаго произведенія нѣтъ мѣста. Записей сомножителей раздѣлять на грани, однако же, не слѣдуетъ.

Расположеніе записи. Расположеніе вычисленій при производствѣ умноженія на многозначное число, поэтому, можно практиковать слѣдующихъ четырехъ видовъ:

а)

$$\begin{array}{rr} & 876 \times 354 = 310\ 104 \\ \hline 876 \times 300 = & 87\ 600 \times \quad 3 = 262\ 800 \\ 876 \times \quad 50 = & 8\ 760 \times \quad 5 = \quad 43\ 800 \\ & 876 \times \quad 4 = \quad 3\ 504 \end{array}$$

Эта запись цѣлесообразна только вначалѣ, но, конечно, необязательна. Здѣсь подробно записанъ весь ходъ промежуточныхъ вычисленій, причемъ надо замѣтить, что необходимо только частныя произведенія записывать такъ, чтобы въ нихъ единицы одинаковыхъ разрядовъ были записаны въ одни и тѣ же отвѣсные (вертикальные) столбцы.

б)

$$\begin{array}{rr} 587 \times 473 = & 277\ 651 \\ \hline 58700 \times \quad 4 = & 234\ 800 \\ 5870 \times \quad 7 = & \quad 41\ 090 \\ 587 \times \quad 3 = & \quad\ 1\ 761 \end{array}$$

Въ этой записи нѣтъ указаній, откуда получились множимыя, такъ какъ опущены начальныя записи, выражающія, что 587 сначала надо помножить на 400, а потомъ 587—помножить на 70. Записано же только то, что умноженіе числа на 400 можно

замѣнить приписаніемъ справа двухъ нулей къ множимому и умноженіемъ записаннаго такимъ образомъ числа на 4, а умноженіе числа на 70 можно замѣнить приписаніемъ справа одного нуля къ записи множимаго и умноженіемъ записаннаго такимъ образомъ числа на 7.

в)

$$\begin{array}{r} 587 \times 473 = 277\ 651 \\ \hline 234800 \\ \quad 41090 \\ \quad\ 1761 \end{array}$$

Эта запись еще короче, такъ какъ здѣсь записаны, со всѣми нулями, только частныя произведенія множимаго на каждый изъ разрядовъ множителя. Записаны они такъ, что первая справа значащая цифра каждаго частнаго произведенія записана въ одинъ столбецъ съ тою цифрою множителя, на которую мы умножаемъ въ данномъ случаѣ данное намъ множимое.

г)

$$\begin{array}{r} 587 \times 473 = 277\ 651 \\ \hline 2348 \\ \quad 4109 \\ \quad\ 1761 \end{array}$$

Въ этой, послѣдней, формѣ запись письменнаго производства умноженія отличается отъ предыдущихъ отсутствіемъ излишнихъ для сложенія нулей и представляетъ собою, въ то же время, окончательный результатъ, къ которому должны быть приведены ученики въ дѣлѣ быстраго умноженія многозначнаго числа на многозначное же. Но крайне полезно для учениковъ, если они начинаютъ съ формы *а*, переходятъ къ формѣ *б* и заканчиваютъ формами *в* и *г*. Это будетъ не потерей, а выигрышемъ времени, такъ какъ ученики вполнѣ усвоятъ себѣ логическія основанія способовъ письменнаго производства дѣйствія умноженія, а не только способы записыванія, поддающіеся, какъ извѣстно, словеснымъ объясненіямъ весьма туго и не вполнѣ соотвѣтственно развитію учениковъ.—Къ тому же письменное производство умноженія многозначнаго числа на многозначное принадлежитъ къ числу тѣхъ ариѳметическихъ вычисленій, при усвоеніи коихъ (разъ матеріалъ 19-ой ступени разработанъ основательно) болѣе или менѣе безплодныя „объясненія“ учителя не столь важны, какъ наглядное представленіе учениковъ объ истинномъ благодѣяніи, которое

оказываютъ арабскія цифры (и въ томъ числѣ нуль) при обозначеніи чиселъ и при умноженіи на 10, на 100, на 1000 и т. п. Такъ, напр., чтобы помножить 274 на 10, если числа обозначены арабскими цифрами, можно, какъ извѣстно, къ совокупности цифръ 274 справа приписать нуль. И это ученики отлично понимаютъ. Для умноженія же этого числа, если оно обозначено такъ: с҃о҃д҃ или такъ: CCLXXIV, на десять, надо сначала разсчитать — сколько получится, а потомъ уже записать, что с҃о҃д҃ × і҃ = ҂ѣ҃м҃, или что CCLXXIV × X = MMDCCXL. Здѣсь обозначенія множимаго и произведенія ничего общаго между собою не имѣютъ, и для умноженія многозначнаго числа на многозначное никакой пользы не приносятъ, — что ученикамъ освѣщаетъ пользу системы счисленія и арабскихъ цифръ для умноженія.

Особенный случай. Если при умноженіи на многозначное число, среди цифръ множителя есть нули, то само собою разумѣется, что объ умноженіи на нуль не можетъ и не должно быть рѣчи. Поэтому запись, подобная, напр., слѣдующей, довольно часто практикуемой неопытными учителями, въ которой, къ тому же, множитель подписанъ подъ множимое, конечно, неразумна:

365	
× 203	
1095	
000	
730	
74095	

Что сначала дѣти должны производить дѣйствіе, по возможности, не механически, а со всѣми (не безсмысленными, конечно,—см. выше) нулями въ частныхъ произведеніяхъ, а съ указаніями на весь процессъ дѣйствія,—это разумѣется само собою.—Если цифра единицъ перваго разряда во множителѣ единица, то лучше всего сводить дѣло не къ умноженію на единицу, а къ тому, что надо прибавить еще одно множимое, и т. д. Располагать записи въ случаяхъ, когда среди внутреннихъ цифръ множителя есть нули, должно такъ же, какъ это выяснено выше:

а)
$$\begin{array}{r} 347 \times 206 = 71\ 482 \\ \hline 347 \times 200 = 34\ 700 \times \quad 2 = 69\ 400 \\ 347 \times \quad 6 = \quad 2\ 082 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} 347 \times 206 = 71\ 482 \\ \hline 34\ 700 \times \quad 2 = 69\ 400 \\ 347 \times \quad 6 = \quad 2\ 082 \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r} 347 \times 206 = 71\ 482 \\ \hline 69\ 400 \\ 2\ 082 \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{r} 347 \times 206 = 71\ 482 \\ \hline 6940 \\ 2082 \end{array}$$

наконецъ,

д)
$$\begin{array}{r} 347 \times 206 = 71\ 482 \\ \hline 694 \\ 2082 \end{array}$$

Въ послѣднемъ образцѣ можетъ быть справа приставленъ одинъ нуль въ первомъ частномъ произведеніи, но только для того, чтобы запись была прозрачнѣе и аккуратнѣе. — При выполненіи учащимися самостоятельныхъ упражненій (подъ № 147), надо постараться объ особенно аккуратномъ записываніи вычисленій одного подъ другимъ.

Расположеніе вычисленій при производствѣ умноженія многозначнаго числа на многозначное, когда запись одного изъ сомножителей или обоихъ оканчивается нулями, лучше всего практиковать сначала слѣдующее, при которомъ нулей не зачеркиваютъ и такимъ образомъ работы не пачкаютъ и не портятъ:

$$\begin{array}{r} 23800 \times \ 570 = 13\ 566\ 000 \\ \hline 238 \times \ 57 \ = 13\ 566 \\ \hline 1190 \\ 1666 \end{array}$$

Вскорѣ можно избавиться отъ записи между линейками, умножая просто 238 на 57 и подписывая частныя произведенія сообразно съ производствомъ дѣйствія. Когда это дѣйствіе произведено, остается только переписать запись полученнаго произведенія снова, но снабдивъ ее нулями. Можно впослѣдствіи и такъ:

$$\begin{array}{r} 173000 \times 2400 = 415\ 200\ 000 \\ \hline 346 \\ 69200000 \end{array}$$

Ежели требуется помножить 8367 на 2006, то, съ точки зрѣнія логической, безразлично, какъ записать:

$$\frac{8367\times2006=}{\begin{matrix}1673400\\50202\end{matrix}}$$ или такъ: $$\frac{8367\times2006=}{\begin{matrix}50202\\1673400\end{matrix}}$$

или, наконецъ, (но только при аккуратной записи!) такъ:

$$\frac{8367\times2006=}{\begin{matrix}16734\\50202\end{matrix}}$$

Еще одинъ пунктъ расположенія записи письменнаго производства умноженія многозначнаго числа на многозначное заслуживаетъ вниманія. Множимое и множитель, во избѣжаніе недостаточнаго внѣшняго изящества записи, должны быть записаны безъ промежутковъ между цифрами различныхъ классовъ, и только въ окончательномъ результатѣ эти промежутки, для большей четкости и вразумительности записи окончательнаго произведенія, должны быть приняты во вниманіе.

Раздробленіе им. чиселъ. § 8. Содержаніе двадцать первой ступени исчерпывается раздробленіемъ и вычитаніемъ именованныхъ чиселъ, тѣсно примыкающими, какъ извѣстно, къ производству умноженія. Начинать надо съ самыхъ простыхъ случаевъ, а именно съ раздробленія простыхъ именованныхъ чиселъ въ единицы ближайшаго низшаго наименованія. Не надо сводить дѣла къ правилу относительно единичнаго отношенія, только тормозящему сознательное усвоеніе учениками истиннаго смысла раздробленія. Сколько фунтовъ въ 15 пудахъ, лотовъ въ 27 фунтахъ, аршинъ въ 415 саженяхъ и т. д.,—вотъ вопросы, съ которыхъ надо начать. При производствѣ умноженія для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ этого рода (ежели въ записи множителя больше цифръ, чѣмъ въ записи множимаго), можно перемѣстить сомножителей, но смыслъ этого перемѣщенія ученикамъ долженъ быть раскрытъ вполнѣ. Далѣе надо перейти къ раздробленію простого именованнаго числа въ единицы любого низшаго (а не ближайшаго низшаго) наименованія (№ 151 „Задачника для уч—лей“ и № 152 „Задачника для уч—ковъ“). Раздробленіе составного именованнаго числа представляетъ собою тоже только задачу, притомъ задачу чисто-ариѳметическую, изъ числа болѣе или менѣе сложныхъ. Поэтому вопросы о раздробленіи надо ставить не на почву правилъ (притомъ очень громоздкихъ) относительно единичныхъ отношеній, а на

почву послѣдовательнаго разрѣшенія того ряда вопросовъ, на которые распадается эта сложная задача. Сообразно съ симъ, и расположеніе вычисленій при раздробленіи составныхъ именованныхъ чиселъ должно быть согласовано съ требованіями, которыя предъявляются къ записи рѣшенія сложной ариѳметической задачи, и поэтому распредѣлено на такъ называемыя „строчки“. Такъ, напр., записи раздробленія составного именованнаго числа: 4 пуда 17 ф. 23 лота 1 зол. 84 доли можно придать слѣдующій видъ:

4 пуда 17 ф. 23 л. 1 зол. 84 доли = 1 638 036 долямъ.

I) 40 ф. × 4 = 160 ф.
II) 160 ф. + 17 ф. = 177 ф.
III) 32 л. × 177 = 5 664 л.

531
354

IV) 5 664 л. + 23 л. = 5 687 лот.
V) 3 зол. × 5687 = 17 061 зол.
VI) 17 061 зол. + 1 з. = 17 062 зол.
VII) 96 дол. × 17 062 = 1 637 952 доли.

1 706 200 *)
— 68 248

VIII) 1 637 952 доли + 84 доли = 1 638 036 долей.

Если учитель считаетъ нужнымъ и болѣе удобнымъ придать записи раздробленія болѣе „излагательный“ видъ, то онъ можетъ, особенно вначалѣ, держаться также слѣдующаго образца:

4 пуда 17 ф. 23 л. 1 зол. 84 д. = 1 638 036 долей.

4 п. = 40 ф. × 4 = 160 ф.; 160 ф. + 17 ф. = 177 фун.;
177 ф. = 32 л. × 177 = 5 664 л.; 5 664 л. + 23 л. = 5 687 л.;
5 687 л. = 3 зол. × 5 682 = 17 061 зол.;
17 061 зол. + 1 зол. = 17 062 зол.;
17 062 зол. = 96 д. × 17 062 = 1 637 952 д.;

1 706 200 *)
— 68 248

1 637 952 д. + 84 д. = 1 638 036 долей.

*) 1 706 200 получилось отъ умноженія числа 17 062 на 100, а 68 248—отъ умноженія числа 17 062 на 4.

Слово „раздробить“. Къ значенію слова „раздробить“ можно подойти такъ: Какая мѣра меньше, мельче: аршинъ или вершокъ? (Вершокъ). Сколько въ аршинѣ вершковъ? (16). Сколько въ 3-хъ аршинахъ? въ 4-хъ? въ 5-ти?... — Когда надо узнать — сколько болѣе мелкихъ мѣръ содержится въ болѣе крупныхъ, то говорятъ: надо „раздробить“ эти крупныя мѣры въ мелкія...— Узнать, сколько вершковъ въ сажени—значитъ раздробить сажень въ вершки...—Что это значитъ: раздробить четыре часа въ минуты? И т. д. *).—Съ мѣрами учащіеся должны, какъ это неоднократно отмѣчалось раньше, ознакомляться по возможности наглядно. Таблицу мѣръ они должны усвоить себѣ путемъ упражненій и, въ крайнемъ случаѣ, хоровымъ повтореніемъ данныхъ этой таблицы по учебнику. Если иной ученикъ желаетъ сдѣлать раздробленіе, начиная съ единицъ самаго низшаго разряда, то этому препятствовать, конечно, не надо. Ученикъ этотъ несомнѣнно принадлежитъ къ числу самыхъ дѣльныхъ, и онъ самъ, а вмѣстѣ съ нимъ и классъ, усмотрятъ, насколько этотъ порядокъ вычисленій неудобенъ. Этотъ порядокъ вычисленія требуетъ прежде всего опредѣленія—сколько долей въ одномъ лотѣ, въ одномъ фунтѣ и въ одномъ пудѣ, потомъ цѣлаго ряда умноженій,—въ нашемъ примѣрѣ—на 4, на 17, на 23,—и, наконецъ, сложенія нѣсколькихъ слагаемыхъ. Всякое уклоненіе учениковъ отъ того порядка вычисленій, который представляетъ сравнительно съ другимъ большія удобства, конечно, должно сдѣлать для учениковъ по возможности поучительнымъ.

Вычитаніе составныхъ им. чиселъ. Вычитаніе составного именованнаго числа изъ составного же иногда, а вычитаніе простого именованнаго числа изъ другого именованнаго числа высшаго наименованія—всегда, требуетъ раздробленія, каждый разъ—не болѣе одной единицы высшаго наименованія—въ единицы слѣдующаго низшаго наименованія. Раздроблять же и уменьшаемое, и вычитаемое въ единицы нижайшаго наименованія ни въ какомъ случаѣ не надо. Тѣмъ не менѣе, ежели у учениковъ есть стремленіе къ такому именно раздробленію, надо сдѣлать это нецѣлесообразное стремленіе для учениковъ поучительнымъ. Ученики при этомъ убѣдятся въ невыгодѣ подобнаго производства дѣйствія вычитанія, вычисленія же явятся въ этомъ случаѣ не только упражненіемъ, полезнымъ для развитія навыка въ вычисленіяхъ.

*) Въ областяхъ, гдѣ малороссійское нарѣчіе извѣстно, слово „дробный“, означающее по-малороссійски „мелкій“, очень помогаетъ усвоенію значенія термина „раздробить“. Раздробить и по-русски означаетъ измельчить, и полезно на это обратить вниманіе учениковъ, не боясь, что на это будетъ затрачено, будто бы, много времени.

Запись производства вычитанія можетъ сначала вестись въ двухъ столбцахъ, примѣрно слѣдующимъ образомъ: *Запись вычитанія.*

6 в. 145 с. 3 ф.	7 ф. 500 с.
—2 в. 474 с. 5 ф.	+3 ф. +144 с.
5 в. 644 с. 10 ф.	10 ф. 644 с.
—2 в. 474 с. 5 ф.	
3 в. 170 в. 5 ф.	

Съ лѣвой стороны можно записать задачу и всѣ ея преобразованія, которыя лучше всего сразу сдѣлать, а съ правой—всѣ тѣ сложенія, которыя потребуются для рѣшенія данной задачи на вычитаніе, обозначивъ предварительно точками въ надлежащихъ мѣстахъ необходимость уменьшить данную часть уменьшаемаго на одну единицу. Конечно, еще лучше, если дѣти пріучены простыя вспомогательныя вычисленія дѣлать изустно. (Упражненія, относящіяся до 21-й ступени, приведены въ №№ 150, 151 и 153 „Задачника для уч—лей“ и въ №№ 152 и 154 „Задачника для уч—ковъ“).

22-я, 23-я и 24-я ступени. § 9. Ученіе о производствѣ дѣленія обоего рода на многозначное число распадается на слѣдующія ступени: двадцать вторую (дѣленіе на одну единицу любого высшаго разряда и на однозначное число единицъ высшаго разряда), двадцать третью (дѣленіе на закруглимое число, т. е. на число, близкое къ однозначному числу единицъ какого-либо высшаго разряда), двадцать четвертую (дѣленіе на число не закруглимое) и двадцать пятую (упражненіе въ дѣленіи на многозначныя числа, въ превращеніи и въ сложеніи, умноженіи и дѣленіи составныхъ именованныхъ чиселъ).

Дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д. Во главѣ этихъ умѣній стоитъ, конечно, вполнѣ сознательное и послѣдовательное производство дѣленія на одну единицу всякаго высшаго разряда: на 10, на 100, на 1 000 и т. д. Какъ умноженіе на одну единицу высшаго разряда занимаетъ важнѣйшее мѣсто въ ученіи о производствѣ умноженія многозначныхъ чиселъ, такъ дѣленіе на одну единицу высшаго разряда занимаетъ первое мѣсто въ ученіи о производствѣ дѣленія многозначныхъ чиселъ. Какъ на 19-й ступени важно не

правило относительно окончательнаго результата при умноженіи на единицу „съ нулями“ (какъ иногда называются единицы высшихъ разрядовъ), такъ и при дѣленіи на 10, на 100, на 1 000 и т. д. тоже важно не правило относительно всѣхъ цифръ частнаго, а самый способъ полученія этихъ цифръ. Даже болѣе того: при дѣленіи на единицы высшихъ разрядовъ, знаніе учениками правила относительно всѣхъ цифръ частнаго сильно повредитъ дальнѣйшему курсу. Это правило можетъ навести учениковъ на не всегда приводящую къ вполнѣ вѣрному остатку мысль, будто для раздѣленія числа на 20 одинаковыхъ частей, надо все дѣлимое сначала раздѣлить на 10, а потомъ полученное частное раздѣлить пополамъ. Надо, чтобы ученики понимали, что для раздѣленія 8 356 на 10 одинаковыхъ частей надо опредѣлять отдѣльно разряды частнаго, начиная съ наивысшаго, т. е.: сначала опредѣлить число цѣлыхъ тысячъ, каковыхъ нѣтъ въ частномъ, затѣмъ—число цѣлыхъ сотенъ, которое получится отъ раздѣленія 83-хъ сотенъ на 10 одинаковыхъ частей, потомъ—число цѣлыхъ десятковъ, которое получится отъ раздѣленія 35-ти десятковъ на 10 одинаковыхъ частей, и наконецъ—число цѣлыхъ единицъ перваго разряда, которое получится отъ раздѣленія 56-ти единицъ этого разряда на 10 одинаковыхъ частей.—Сначала надо брать дѣлимыя, дѣлящіяся на-цѣло безъ остатка на 10, потомъ—дѣлимыя, дающія остатокъ (№№ 155 и 156 „Задачника для уч—лей“ и № 157 „Задачника для уч—ковъ“). При этомъ записывать частныя произведенія на цифру частнаго не слѣдуетъ, т. е. не слѣдуетъ писать такъ:

```
 8370|10 = 837
— 80
 ----
   37
 — 30
 ----
    70
  — 70
 ----
     0
```

Можно разсуждать, напр., такъ: 8 тысячъ раздѣлить на 10 одинаковыхъ частей, тысячъ не получится; 8 тысячъ обратимъ въ сотни, тогда получимъ 80 сотенъ; 80 сотенъ раздѣлить на 10 одинаковыхъ частей, получимъ въ каждой части 8 сотенъ и т. д. Вначалѣ можно писать 8 сот. 3 дес. 7 ед., но впослѣдствіи это надо устранить. Точно такъ же надо поступать при дѣленіи на 100, на 1000, и т. д.

Кратное сравненіе съ десяткомъ, сотнею, тысячею и т. д.

Когда дѣлается кратное сравненіе, и дѣлитель равенъ единицѣ высшаго разряда, приходится говорить иначе (см. примѣръ): въ 8-ми тысячахъ одинъ десятокъ содержится менѣе тысячи разъ; обратимъ 8 тысячъ

въ сотни; 8 тысячъ все равно, что 80 сотенъ, а 80 сотенъ все равно, что 800 десятковъ (это потребуетъ большого труда какъ отъ учителя, такъ и отъ учениковъ); но въ 800 десяткахъ одинъ десятокъ содержится 800 разъ, или 8 сотенъ разъ, и т. д. Какъ ни преисполнена трудностей занимающая насъ ступень, но ея содержаніе должно быть учениками усвоено вполнѣ. Исключительно отъ настойчивости въ требованіяхъ учителя по отношенію къ изложенію способа вычисленія частнаго (при раздѣленіи числа на 10, 100, 1000 и т. д. одинаковыхъ частей) и отношенія данныхъ чиселъ къ 10-ти, къ 100, къ 1000 и т. д. (при кратномъ сравненіи) зависятъ всецѣло успѣхи учениковъ на дальнѣйшихъ ступеняхъ обученія. (№№ 157 и 159 „Задачника для уч—ковъ“ посвящены самостоятельнымъ упражненіямъ въ занимающемъ насъ дѣленіи обоего рода.) Здѣсь важна перемѣна порядка сомножителей.

Дѣлитель однозначное число единицъ высшаго разряда.

Когда дѣти проработали вполнѣ сознательно и усвоили себѣ вполнѣ твердо все, намѣченное выше, можно перейти къ дѣленію на однозначное число единицъ высшаго (сначала второго) разряда, каковое дѣленіе также входитъ въ составъ 22-й ступени. Подходить къ этому дѣленію надо исподоволь, примѣрно, слѣдующимъ образомъ (№ 160 „Задачника для уч — лей“): „Когда надо раздѣлить яблоко на 4 одинаковыя части, можно раздѣлить его сначала пополамъ, а потомъ — полученное пополамъ... — Когда надо раздѣлить конецъ веревки на 6 одинаковыхъ частей, то можно его сначала разрѣзать пополамъ, а потомъ полученное на 3 одинаковыя части (наглядно!)...—Если надо разрѣзать листъ бумаги на 20 одинаковыхъ частей, то можно сначала разрѣзать его пополамъ, а потомъ полученное — на 10 одинаковыхъ частей, или сначала на 10 одинаковыхъ частей, а потомъ полученное — пополамъ...— Раздѣлить 60 на 20 одинаковыхъ частей! (Сначала на 10 равныхъ частей, получимъ 6, полученное—пополамъ!) 120 на 20! 140 на 20! 160 на 20! 240 на 20! 240 на 30! 360 на 60! 360 на 90! 480 на 80! 270 на 30!“ и т. д. Потомъ можно перейти къ случаямъ, когда въ частномъ должно получиться двузначное или многозначное число, каждую цифру котораго надо опредѣлять отдѣльно:

720 | 20; 240 | 20; 350 | 25; 520 | 20; 840 | 30; и т. д.

При этомъ разсуждать можно, напр., такъ: 7 сотенъ раздѣлить на 20 частей, въ каждой части не будетъ сотенъ; обратимъ 7

сотенъ въ десятки, получимъ 70 десятковъ да еще два десятка, всего 72 десятка. Ихъ надо раздѣлить на 20 частей; раздѣлимъ сначала на 10 частей, получимъ цѣлыхъ 7 десятковъ, послѣдніе раздѣлимъ пополамъ, получимъ цѣлыхъ десятковъ 3 въ каждой части; въ 20-ти частяхъ будетъ 60 десятковъ; останется не раздѣленныхъ десятковъ 12, и т. д. — Только настойчивое упражненіе въ дѣленіи на 20, 30, 40, 50, и т. д., на 200, 300, 400, и т. д., можетъ привести къ должнымъ результатамъ въ дѣленіи многозначныхъ чиселъ. При этомъ, записывать, на занимающей насъ ступени, произведенія изъ дѣлителя на цифру частнаго нѣтъ никакой надобности. Но если учитель привыкъ самъ къ этому записыванію, то оно особеннаго вреда ученикамъ не принесетъ. Желательно, конечно, избѣгать этого многописанія.— Вначалѣ—рядомъ съ цифрою частнаго можно поставить сокращенное наименованіе разряда; но потомъ это наименованіе можно опускать. — Отъ многочисленности упражненій на 22-й ступени и отъ настойчивости учителя зависятъ всѣ дальнѣйшіе успѣхи дѣтей въ производствѣ дѣленія. И въ этомъ случаѣ настойчивость и отсутствіе торопливости также приводятъ не къ потерѣ, а къ выигрышу времени и силъ, и къ важнымъ въ развивательномъ отношеніи результатамъ.

Кратное сравненіе съ однозн. числомъ ед. высш. разряда.

Нѣкоторыя затрудненія особаго рода встрѣчаются при кратномъ сравненіи многозначнаго числа съ однозначнымъ числомъ единицъ высшаго разряда. Пусть требуется узнать, сколько разъ 30 содержится въ 73 565-ти. При этомъ можно разсуждать такъ (нѣсколько иначе, чѣмъ при дѣленіи на извѣстное число частей!): въ 7-ми десяткахъ тысячъ 30 единицъ не содержится ни одного десятка тысячъ разъ; обратимъ 7 десятковъ тысячъ въ тысячи и прибавимъ еще 3 тысячи, получимъ 73 тысячи; въ 30-ти тысячахъ одна тысяча содержится 30 разъ, а 30 единицъ содержатся одну тысячу разъ, а въ 73-хъ тысячахъ 30 единицъ содержатся двѣ тысячи разъ, и т. д. Трудность—въ освобожденіи отъ промежуточнаго разсужденія, отмѣченнаго выше разгонистымъ шрифтомъ.—Къ этой ступени сильно тяготѣютъ упражненія дѣтей въ рѣшеніи вопросовъ о томъ—сколько всѣхъ десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д. содержится въ данномъ многозначномъ числѣ,—вопросовъ, освѣщающихъ десятичную нумерацію болѣе яркимъ свѣтомъ. Обыкновенно вопросамъ этимъ отводятъ мѣсто среди упражненій, клонящихся къ лучшему усвоенію

нумераціи, но это, очевидно, не вполнѣ цѣлесообразно безъ достаточнаго пониманія самаго производства дѣленія учениками.

23-я ступень.

§ 10. Двадцать-третья ступень включаетъ дѣленіе на закруглимаго дѣлителя. Закруглимыми дѣлителями надо считать такіе, вторая цифра которыхъ, считая отъ лѣвой руки къ правой, больше 6-ти или же меньше 3-хъ. Къ числу закруглимыхъ, поэтому, принадлежатъ, напр., числа: 37, 48, 59, 672, 483, 296, даже 271, которыя, по порядку, близки къ числамъ: 40, 50, 60, 700, 500, 300, и числа 21, 32, 53, 739, 626, 819, даже 829, которыя близки къ числамъ: 20, 30, 50, 700, 600, 800. Такія же числа, какъ 35, 46, 54, 341, 452, 268, принадлежатъ къ классу чиселъ не закруглимыхъ.—Раньше всего должна быть разработана двадцать-третья ступень, занимающаяся дѣленіемъ на закруглимое число, и должна быть усвоена на особенно многочисленныхъ упражненіяхъ. Дабы дѣленіе на закруглимое число можно было свести къ дѣленію на число круглое, слѣдуетъ обратиться къ примѣру, дѣйствующему на воображеніе учениковъ и способному внушить имъ, что, задаваясь цифрою частнаго, мы тотчасъ же провѣряемъ, точно разсчитываемъ—пригодна ли для насъ найденная нами, сначала только на-угадъ, цифра частнаго. Для этой цѣли можно прибѣгнуть къ слѣдующему, дѣйствующему на воображеніе учениковъ, примѣру: 8 тысячныхъ билетовъ (т. е. билетовъ, изъ коихъ каждый стоитъ одну тысячу рублей,—такіе билеты, хотя и не кредитные, есть!), 7 сотенныхъ, 5 десятирублевокъ и 6 рублевокъ надо раздать 31-му человѣку такъ, чтобы всѣмъ досталось денегъ поровну. Запишемъ это такъ:

т.	с.	д.	р.	
8	7	5	6	31.

Тысячныхъ билетовъ никто изъ нихъ не получитъ (для того, чтобы они могли получить хотя бы только по одному тысячному билету, необходимо было бы имѣть въ своемъ распоряженіи 31 тысячный билетъ, а ихъ у насъ—всего 8 штукъ). Размѣняемъ эти 8 билетовъ на сотенныя бумажки, за каждый дадутъ 10 сотенныхъ, а за 8 дадутъ 80 сотенныхъ; да у насъ еще есть 7 сот., стало-быть, всѣхъ сотенныхъ билетовъ у насъ будетъ 87 шт. Если бы людей было 30, то каждый получилъ бы по двѣ сотенныхъ бумажки. Дадимъ тридцати-одному человѣку по двѣ бумажки; мы раздадимъ такимъ образомъ всего 62 билета. Посмо-

тримъ—что изъ этого выйдетъ, а запишемъ это такъ (для ясности еще разъ приводится первая строчка):

т.	с.	д.	р.		с.
8	7	5	6	31	= 2
6	2				

Чтобы узнать, сколько сотенныхъ билетовъ осталось нерозданныхъ, вычтемъ 62 изъ 87-ми; получимъ, что нерозданныхъ осталось 25 сот. бумажекъ. Разсчитали хорошо: осталось столько сотенныхъ билетовъ, что изъ нихъ ужъ нельзя отдать ни одному изъ нашихъ получателей ни одного билета...—Размѣняемъ ихъ, поэтому, на десятирублевки (на красненькія); сколько намъ за нихъ дадутъ красныхъ (десятирублевыхъ) бумажекъ? и т. д.

Понятіе о закругли-момъ числѣ. До правила дѣленія на извѣстное закруглимое число одинаковыхъ частей ученики должны добраться, благодаря своимъ самостоятельнымъ работамъ (подъ №№ 165—170 „Задачника для уч—ковъ“). При выясненіи понятія о закруглимомъ числѣ (№ 162 „Задачника для учителей“) ученики должны ознакомиться съ выраженіями: „20 рублей слишкомъ“, „20 рублей безъ малаго“, „число 31 близко къ 30-ти“, „круглое число“, „закруглить число“. Характеръ этихъ упражненій можетъ быть, примѣрно, такой:

„Есть у меня 21 рубль,—я могу сказать, что у меня слишкомъ 20 рублей; если у меня 19 рублей, я могу сказать, что у меня безъ малаго 20 рублей...—Числа: 31 и 32 близки къ 30; 41 и 42—близки къ сорока; 28 и 29 близки къ 30-ти; 38 и 39 близки къ сорока...—У меня 59 рублей. Много ли мнѣ не хватаетъ до шестидесяти...—Шестьдесятъ—круглое число; пятьдесятъ, сорокъ, двадцать—тоже!—Скажите-ка какое-нибудь круглое число!.. Костя!..—Володя, у меня 49 копеекъ, закругли!—У одного человѣка 68 коп., закруглить! Сколько будетъ?—11 и 12 близки къ какому числу? 21 и 22—къ какому? 41 и 42—къ какому? 58 и 59—къ какому? и т. д.

Полезно (№ 163 „Задачника для уч—лей) посвятить довольно много упражненій, подобныхъ раздѣленію 738-ми на 29 одинаковыхъ частей, а также (№ 164) — упражненій, цѣль которыхъ заключается въ томъ, чтобы ученики убѣдились, что, закругляя дѣлителя (ежели его можно закруглить), искомую цифру частнаго легче угадать и что отъ этого закругленія не страдаетъ вѣрность расчета. (№ 171 „Задачника для уч—лей“ посвященъ закруглимымъ трехзначнымъ числамъ.) Ученики должны понять, что дѣля, напр., 73 десятка на 30 одинаковыхъ частей мы получимъ 2 цѣлыхъ десятка въ каждой части и что 29 такихъ частей, по 2 десятка въ каждой, дадутъ 58 десятковъ, которыя и надо вычесть изъ 73-хъ десятковъ, чтобы узнать, сколько осталось десятковъ не раздѣленныхъ. При этомъ мы не дѣлаемъ никакой ошибки, и это очень важно.

Повтореніе дѣленія. Полезно на этой же ступени (въ виду того, что она тѣсно примыкаетъ къ предыдущей, къ 22-й, ступени и довольно далеко отстоитъ отъ 17-й и 18-й ступеней, на которыхъ учениками усвоено дѣленіе на однозначнаго дѣлителя, дающее въ частномъ двузначное или многозначное число), связно повторить: а) дѣленіе на однозначное число, б) дѣленіе на одну единицу высшаго разряда, в) дѣленіе на однозначное число единицъ высшаго разряда, и г) дѣленіе на закруглимое число (№ 172 „Задачника для уч—лей“). При этомъ окажется, что въ случаяхъ первыхъ двухъ родовъ должны быть записаны только дѣлимое, дѣлитель, частное и остатокъ (если остатокъ есть), а частныя произведенія послѣдовательныхъ цифръ частнаго на дѣлителя не будутъ записаны. Эти частныя произведенія будутъ записаны только при дѣленіи на закруглимое число, и это, строго говоря, первая ступень курса, на которой ученикъ совершаетъ производство дѣленія, въ полномъ смыслѣ слова, письменно. На этой же ступени должно обратить вниманіе на случай полученія нулей среди цифръ частнаго. Опасаться того, что дѣти не замѣтятъ и не усвоятъ себѣ самаго способа дѣленія, сводящагося къ раздѣленію первой цифры или первыхъ двухъ цифръ дѣлимаго на первую или на увеличенную единицею первую цифру дѣлителя, не слѣдуетъ. Практика показываетъ, что дѣти замѣчаютъ этотъ секретъ, притомъ своевременно, именно тогда, когда объ этомъ секретѣ имъ ничего не говорятъ. Важно, чтобы ученикъ могъ увѣренно добраться до того, что, для раздѣленія, напр., 623-хъ на 79, надо 62 раздѣлить на 8 потому-то и потому-то, а знаетъ ли онъ секретъ этого дѣленія—неважно: при сознательномъ отношеніи къ дѣлу, онъ его самъ откроетъ. Само собою разумѣется, что о томъ, что такое-то число содержится въ такомъ-то числѣ столько-то разъ, рѣчь можетъ итти при кратномъ сравненіи, а не при дѣленіи на извѣстное число одинаковыхъ частей. (№ 173 „Задачника для уч—лей“ даетъ примѣры на раздѣленіе на трехзначныя закруглимыя числа, № 174 „Задачника для уч—ковъ“—подобные примѣры для самостоятельныхъ работъ.) Для внесенія разнообразія и большей вдумчивости въ самостоятельныя работы уче-

никовъ полезно („Задачникъ для уч—ковъ“ № 166) посвятить извѣстное число упражненій превращенію лотовъ—въ фунты, долей—въ золотники, четвериковъ—въ четверти, гарнцевъ—въ четверики, дюймовъ—въ аршины, минутъ—въ часы, и саженей—въ версты. Необходимо также обратиться къ особеннымъ случаямъ дѣленія (57|19, 68|17, 76|19, 78|13, 87|29 и т. п. (ср. § 10 этой же главы), а также къ опредѣленію числа всѣхъ единицъ одного и того же высшаго разряда въ данныхъ числахъ и къ дѣленію составныхъ именованныхъ чиселъ на извѣстное однозначное число одинаковыхъ частей.

24-ая ступень: незакруглимый дѣлитель.

§ 11. Дѣленію на незакруглимое число посвящена 24-я ступень обученія. Извѣстно, что при дѣленіи на незакруглимое число неизбѣжно-необходимо пріучить дѣтей къ двумъ изустнымъ пробамъ (напримѣръ, при дѣленіи на 45, къ изустной пробѣ раздѣленія на 40 и къ изустной пробѣ дѣленія на 50) и къ отысканію частнаго, лежащаго между пробными частными, но въ то же время наиболѣе вѣроятнаго въ данномъ случаѣ. Важно только, чтобы учитель, самъ не торопясь, пріучалъ и учащагося къ неторопливому, спокойному и особенно сознательному производству интересующаго насъ дѣйствія. (Въ „Задачникѣ для уч—лей“ и „Задачникѣ для уч—ковъ“ помѣщены методически подобранныя упражненія такого рода, что послѣдовательная ихъ проработка неизбѣжно приведетъ ученика къ усвоенію главнѣйшихъ пріемовъ и трудностей этой ступени обученія.) При этомъ бываютъ слѣдующіе случаи: а) оба пробныя частныя, найденныя съ помощью двухъ закругленій, равны между собою (при дѣленіи 475 на 85, мы, дѣля 475 на 80 получаемъ въ частномъ 5, и дѣля на 90, получаемъ тоже 5); б) изъ двухъ пробныхъ частныхъ одно больше другого только на одну единицу (при дѣленіи 356-ти на 45, мы, дѣля дѣлимое на 40, получаемъ въ первомъ пробномъ частномъ 8, а дѣля его на 50, получаемъ во второмъ пробномъ частномъ 7); в) изъ двухъ пробныхъ частныхъ одно болѣе другого на двѣ единицы (при дѣленіи 156-ти на 25, мы, дѣля дѣлимое на 20, получаемъ въ первомъ пробномъ частномъ 7, а дѣля на 30, во второмъ—5; наконецъ, г) изъ двухъ пробныхъ частныхъ одно значительно больше другого (при дѣленіи 217 на 24 мы, дѣля дѣлимое на 20, получаемъ въ первомъ пробномъ частномъ 10, а дѣля на 30, во второмъ—7). Умѣніе сразу, болѣе или менѣе вѣрно, „задаваться“ цифрою частнаго дается практикою, но вѣрное, если такъ можно выразиться, взвѣшиваніе этой цифры съ помощью не угадыванія только, а также сознательнаго выбора подходящей цифры, все-таки можетъ быть скоро пріобрѣтено учениками. Для этого учитель долженъ требовать не механическаго производства дѣленія, а требовать также, чтобы дѣти различали эти случаи: а) если оба пробныхъ частныхъ — одно и то же число, то они должны смѣло принять это число за истинное частное; б) если разность между пробными частными—одна единица, то они должны за истинное частное принять меньшее изъ частныхъ; в) если одно пробное частное болѣе другого на двѣ единицы, то ученики должны принять за истинное частное то число, которое заключается между пробными частными; г) если между пробными частными заключаются два числа, то изъ этихъ двухъ лучше выбрать меньшее; наконецъ, д) если между пробными частными заключается нѣсколько цѣлыхъ чиселъ, то надо взять среднее между ними, и изъ двухъ среднихъ—меньшее. Пусть данъ примѣръ: 17753 раздѣлить на 36.


```
17753 | 36 = 4 с. 9 д. 3 ед.
144
-----
 335
 324
-----
  113
  108
-----
    5
```

Разсуждать можно, примѣрно, слѣдующимъ образомъ: одинъ десятокъ тысячъ раздѣлить на 36 равныхъ частей, — десятковъ тысячъ въ каждой части не получится. 17 тысячъ раздѣлить на 36 равныхъ частей, въ частномъ тысячъ также не получится; 177 сотенъ раздѣлить на 36 равныхъ частей, получатся сотни. Сколько? Если 177 раздѣлить на 30 частей, то въ каждой части получится цѣлыхъ сотенъ 5; если же 177 сотенъ раздѣлить на 40 равныхъ частей, то получатся 4 сотни. Возьмемъ поэтому 4 сотни въ частномъ.—Теперь разсчитаемъ, сколько во всѣхъ 36-ти частяхъ окажется сотенъ и сколько осталось сотенъ, не раздѣленныхъ на части. И т. д.—При этомъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ могутъ получиться двѣ пробныя цифры, отличающіяся болѣе, чѣмъ на одну единицу. Напр., въ нашемъ примѣрѣ 335 десятковъ, раздѣленные на 30 частей, дадутъ 11 цѣлыхъ десятковъ въ каждой части, а 335 десятковъ, раздѣленные на 40 частей, дадутъ только 8 цѣлыхъ десятковъ въ каждой части; между 8-ю и 11-ю два числа, изъ которыхъ мы возьмемъ 9. — При этомъ, конечно, только вначалѣ полезно отмѣчать начальной буквой названіе получаемаго въ частномъ раз-

ряда. Знаковъ же вычитанія писать, строго говоря, рѣшительно не для чего, такъ какъ вопроса о томъ, какое надо сдѣлать дѣйствіе, въ этомъ случаѣ и быть не должно.

Упражненія при незакруглимомъ дѣлителѣ.

Упражненій въ дѣленіи на незакруглимое число должно съ учениками проработать много съ тѣмъ, чтобы впослѣдствіи никогда ужъ не возвращаться къ началу и чтобы ученикамъ дать въ руки пріемъ, вѣрно и сознательно ведущій къ цѣли. Задачъ съ условіями на этой ступени не требуется, такъ какъ таковыя только замедляютъ усвоеніе учениками самаго способа производства дѣленія и преодолѣніе этой трудности. Дѣленіе чиселъ на извѣстныя одинаковыя части, которыя выражены незакруглимымъ числомъ (т. е. кратное сравненіе многозначныхъ чиселъ съ незакруглимыми многозначными числами) новыхъ трудностей не содержитъ. Требуется только иначе понимать цифры частнаго: при дѣленіи на извѣстное число одинаковыхъ частей ищутъ, сколько единицъ даннаго разряда заключается въ каждой части, при кратномъ же сравненіи надобно каждый разъ отыскивать—сколько тысячъ разъ, сколько сотенъ разъ и т. д., дѣлитель содержится въ дѣлимомъ. Если дѣленіе на извѣстное число одинаковыхъ частей дѣтьми усвоено и если матеріалъ предъидущихъ ступеней разрабатывался также съ точки зрѣнія кратнаго сравненія чиселъ, то примѣненіе выше намѣченнаго производства дѣленія къ случаямъ кратнаго сравненія не будетъ заключать въ себѣ почти ничего особенно труднаго. (Въ № 176 „Задачника для уч—ковъ“ предложены преимущественно упражненія въ дѣленіи на незакруглимыя, притомъ двузначныя числа, и только три примѣра предложены на дѣленіе чиселъ трехзначныхъ). Многіе примѣры въ этомъ случаѣ полезно брать съ одинаковыми дѣлимыми, дабы ученикъ могъ обратить вниманіе на самую сущность дѣла. Эту сущность, какъ извѣстно, часто слишкомъ сильно заслоняетъ разнообразіе примѣровъ, задаваемыхъ при усвоеніи учениками дѣленія многозначныхъ чиселъ на многозначныя и большею частью выбираемыхъ учителемъ безъ всякаго соблюденія методическихъ особенностей дѣлителя. Этимъ несоблюденіемъ методическихъ требованій и объясняются какъ недостаточные успѣхи учениковъ въ производствѣ дѣленія многозначныхъ чиселъ, такъ и недостаточный интересъ къ этому ученію со стороны учениковъ. Это отсутствіе интереса учитель напрасно относитъ къ невниманію учениковъ или къ собственному нерадѣнію; оно зависитъ только отъ указаннаго выше невниманія къ методическимъ требованіямъ.

25-я ступень: упражненія въ примѣненіи дѣленія.

§ 12. Кромѣ выше разсмотрѣнныхъ случаевъ дѣленія, существуютъ и такіе, когда ученикъ долженъ, если онъ не желаетъ слишкомъ медленно вычислять, посвободнѣе воспользоваться своимъ ариѳметическимъ соображеніемъ, своею смѣтливостью. Достаточно обратить вниманіе на случаи дѣленія: 52-хъ на 26, 64-хъ на 16, 84-хъ на 21, 96-ти на 12, 72-хъ на 24, 51-го на 17, 57-ми на 19, 68-ми на 17 и т. п., чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго. (№ 177 „Задачника для уч—лей“ содержитъ достаточное число подобныхъ упражненій). Цѣль ихъ заключается въ необходимости убѣдить учащихся, что иногда не только дозволительно, но даже прямо слѣдуетъ какъ бы угадать частное съ тѣмъ, чтобы потомъ изустно разсчитать—подходящую ли мы взяли цифру. Напр., 58 раздѣлить на 19; если закруглить 19, получимъ въ частномъ два; а если прямо взять въ частномъ 3 (рискнуть!) да изустно разсчитать, сколько будетъ 3-жды 19, то получимъ вѣрное частное. При этомъ ученики могутъ опредѣлить только наибольшее значеніе цифры частнаго, каковому опредѣленію ихъ и должно научить ранѣе проработки остальныхъ упражненій этой ступени на примѣрахъ дѣленія двузначнаго числа на двузначное же. Если учащагося не будутъ смущать остатки, то учитель можетъ число примѣровъ (№ 177) произвольно увеличить безъ всякаго труда. (Этого рода примѣры не помѣщены подъ тѣмъ нумеромъ, хотя они въ методическомъ отношеніи прямо необходимы.) Полезно при проработкѣ упражненій этого рода имѣть въ виду весьма полезную для этой цѣли таблицу слѣдующихъ двузначныхъ и трехзначныхъ чиселъ, дѣлящихся на двузначныя же и представляющихъ собою случаи, въ которыхъ закругленіе дѣлителя либо невозможно, либо недостаточно быстро ведетъ къ цѣли (жирно напечатаны особенно рѣдко встрѣчающіяся и не очевидныя произведенія):

51	**17 × 3**	98	49 × 2	121	11 × 11
52	13 × 4	102	17 × 6	123	41 × 3
57	**19 × 3**	104	13 × 8	129	43 × 3
68	17 × 4	**111**	**37 × 3**	**133**	**19 × 7**
76	19 × 4	**112**	**16 × 7**	136	17 × 8
78	13 × 6	114	19 × 6	138	23 × 6
87	**29 × 3**	116	29 × 4	**141**	**47 × 3**
91	13 × 7	117	13 × 9	143	13 × 11
92	23 × 4	**119**	**17 × 7**	**147**	**49 × 3**

Число цифръ частнаго. На той же 25-й ступени, преслѣдующей усовершенствованіе пріемовъ вычисленія частнаго, умѣстно возвратиться къ вопросу о числѣ цифръ въ частномъ. Разсужденія при этомъ вначалѣ могутъ быть такого рода. Пусть требуется раздѣлить 825 на 75 равныхъ между собою частей, запишемъ:

$$825 \mid \underline{75} =$$

Разсуждаемъ такъ: если 8 сотенъ раздѣлить на 75 равныхъ частей, то въ каждой части не получится цѣлой сотни; можемъ вначалѣ (но только для большей рѣзкости) написать это даже такъ:

$$825 \mid \underline{75} = 0 \text{ сотенъ} +$$

Если 82 десятка раздѣлить на 75 равныхъ частей, то въ каждой части, очевидно, получимъ только по одному цѣлому десятку; записываемъ это такимъ образомъ:

$$825 \mid \underline{75} = 0 \text{ сотенъ} + 1 \text{ десятокъ} + \ldots$$

Во всѣхъ 75-ти частяхъ получится 75 десятковъ, которые и вычтемъ изъ 825; записываемъ это, напр., такъ:

$$\begin{array}{r} 825 \mid \underline{75} = 0 \text{ сотенъ} + 1 \text{ десятокъ} + \ldots \\ -\ 750 \\ \hline 75 \end{array}$$

Въ остаткѣ 75 единицъ; если это число раздѣлить на 75 частей, то въ каждой части получимъ одну единицу; приписываемъ эту единицу получаемъ въ частномъ 0 сотенъ + 1 десятокъ + 1 единица, т. е. 11. Впослѣдствіи необходимо освободиться и отъ нулей, и отъ знаковъ сложенія, и отъ обозначенія имени разряда словами, и отъ прочихъ излишествъ подобной проработки. Но до этихъ сокращеній надо учащихся довести постепенно, притомъ такъ, чтобы они по возможности самостоятельно додумались до пользы каждаго изъ этихъ сокращеній. Такимъ путемъ достигнута будетъ большая законченность, большая полнота разумѣнія и знанія.—Познанія, пріобрѣтенныя на ступеняхъ 22-й, 23-й и 24-й, отнюдь не должны мѣшать ученикамъ видѣть и пользоваться своимъ здравымъ смысломъ. Поэтому, въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ частное очевидно, ученикамъ надо этимъ пользоваться. Для примѣра раздѣлимъ 412356 на 261; при этомъ разсуждаемъ: 412 | 251 очевидно 1; остается 161; 1 613 | 200 будетъ 8, а 1 613 | 300 будетъ 5; 8 много,

5 мало, можно взять или 8 или 7; беру 6, останется 107; хорошо! Продолжаю: 1 075 | 251, или закруглivъ, 1 000 | 250, очевидно 4, и т. д. Если ученики научены только рабски пользоваться правилами, то такой выучкѣ сочувствовать, конечно, нельзя. (Дабы занятія не были слишкомъ однообразны, въ № 178 „Задачника для уч—ковъ“ предложены нетрудныя смѣшанныя задачи для самостоятельныхъ упражненій въ умноженіи. Въ № 179 „Задачника для уч—лей“ предложены упражненія въ дѣленіи на незакруглимаго дѣлителя, а въ №№ 180 — 182 разнообразныя смѣшанныя упражненія и задачи). Подобными упражненіями не надо пренебрегать и впослѣдствіи.

Послѣднія цифры дѣлимаго и дѣлителя—нули. На этой же ступени слѣдуетъ обратить вниманіе на дѣленіе чиселъ, при которомъ записи дѣлимаго и дѣлителя оканчиваются нулями. Обыкновенно принято эти случаи выдѣлять изъ числа всѣхъ остальныхъ. Но такое выдѣленіе можетъ быть терпимо только въ томъ случаѣ, когда дѣлимое дѣлится на-цѣло безъ остатка на дѣлителя: тогда сокращеніе нулей вполнѣ дозволительно, такъ какъ сокращаетъ письменное производство дѣйствія. Непозволительно зато подобное сокращеніе, когда у того, кто производитъ дѣйствіе (дѣленія на извѣстное число частей или кратнаго сравненія), нѣтъ увѣренности въ дѣлимости безъ остатка и когда онъ не намѣренъ частное изобразить въ видѣ цѣлаго съ дробью. Такъ какъ это и не можетъ быть вполнѣ выяснено учащемуся, то, конечно, такое письменное сокращеніе (не на время только, а навсегда) нулей отнюдь не должно обращаться въ привычку учащихся, какъ это часто, къ сожалѣнію, замѣчается. Для опредѣленія же приблизительнаго частнаго изустное сокращеніе необходимо, и это учащіеся понять въ состояніи,—тѣмъ болѣе, что на этой ступени они уже давно пріучились смотрѣть преимущественно только на первую цифру дѣлителя. Нѣкоторая неизбѣжная, при этомъ, потеря времени на записываніе „ненужныхъ“ нулей не такъ важна, какъ надлежащее пониманіе этого исключительнаго случая. Чтобы показать, что нулей нельзя откидывать, можно взять примѣръ: 170 яблокъ раздать 70 мальчикамъ. Каждый мальчикъ получитъ по 2 яблока, но останется нерозданныхъ яблокъ цѣлыхъ 30 штукъ; если же въ дѣлимомъ и дѣлителѣ откинуть нуль, то 17, раздѣленное на 7, въ частномъ дастъ 2, но остатокъ будетъ 3, а не тридцать. Въ этомъ-то и заключается причина, по которой механическое сокращеніе нулей на этой ступени совер-

шенно неумѣстно. (№№ 183 и 184 „Задачника для уч—лей“ посвящены исключительно кратному сравненію отвлеченныхъ чиселъ, а №№ 185—188 „Задачника для уч—ковъ“ самостоятельнымъ упражненіямъ въ дѣленіи обоего ряда, а отчасти также упражненіямъ, которыя служатъ къ уясненію дѣленія).

Дѣленіе именованныхъ чиселъ на именов.

Къ этой же ступени тяготѣютъ: кратное сравненіе простыхъ и составныхъ именованныхъ чиселъ и такъ называемое превращеніе именованныхъ чиселъ. Начать изученіе дѣленія именованныхъ чиселъ на именованныя же надо со случая, когда дѣлитель и дѣлимое—числа одного и того же наименованія, затѣмъ можно перейти къ случаю, когда у нихъ наименованія различныя, далѣе—къ случаю, когда одно изъ данныхъ чиселъ (дѣлимое или дѣлитель)—составное, а другое—простое именованное число, и наконецъ къ случаю, когда оба числа—составныя именованныя числа.—Расположеніе записи въ этомъ послѣднемъ случаѣ можно рекомендовать слѣдующее:

21 п. 23 ф. 4 л. : 4 п. 13 ф. 8 л. = 5.

21 п. = 40 фун. × 21 = 840 фун.; 840 ф. + 23 ф. = 863 фун.
863 ф. = 32 л. × 863 = 27 616 л.; 27 616 л. + 4 л. = 27 620 л.

1 726
25 89

Точно такъ же вычислимъ, что 4 п. 13 ф. 8 л. равны 5 524 лотамъ, а послѣ этого произведемъ кратное сравненіе:

27 620 л. : 5 524 л. = 5,

что и требовалось опредѣлить.

Эти записи можно сократить въ томъ смыслѣ, чтобы не было записано, что 21 пудъ = 40 ф. × 21 и что 863 ф. = 32 л. × 863, а было бы записано только дѣйствіе: 40 ф. × 21 и 32 л. × 863.—(Производству кратнаго сравненія посвящены №№ 189 и 190 „Задачника для уч—лей“ и № 191 „Задачника для уч—ковъ“). Ученики должны вполнѣ ясно понять, что для кратнаго сравненія двухъ разноименныхъ (пуды и лоты, версты и сажени и т. п.) и двухъ составныхъ именованныхъ

чиселъ не только полезно, но и необходимо, приведеніе ихъ къ общему наименованію. Для этой спеціальной цѣли полезно задавать задачи въ родѣ слѣдующихъ: „Сколько разъ 12 вершковъ содержится въ 3-хъ саженяхъ, 20 лот. въ 4-хъ пудахъ?“ и т. п. (Задачи этого рода не предложены въ „Задачникѣ для уч—лей“ потому, что ихъ учитель можетъ и самъ составить во всякое время и въ надлежащій моментъ, сколько ему понадобится, пользуясь таблицею, приведенной на стр. 143-й, изъ которой дѣлимому учитель можетъ приписать высшее, а одному изъ его сомножителей—низшее наименованіе; таблица эта приведена также и въ № 177 „Задачника для учителей“).

Первыя упражненія въ превращеніи именованныхъ чиселъ.

Что касается превращенія именованныхъ чиселъ, то надо начинать обученіе дѣтей этому вычисленію со случаевъ самыхъ простыхъ, а именно съ вопросовъ о томъ, сколько фунтовъ содержится въ данномъ числѣ лотовъ, или сколько аршинъ въ данномъ числѣ вершковъ, т. е. сколько въ данномъ числѣ единицъ какого-либо наименованія содержится единицъ ближайшаго высшаго наименованія. Вопросъ о томъ, сколько фунтовъ содержится въ такомъ-то количествѣ лотовъ и вообще сколько единицъ высшаго наименованія содержится въ нѣкоторой совокупности единицъ ближайшаго наименованія низшаго, сводится, какъ извѣстно, къ кратному сравненію этой совокупности единицъ съ числомъ единицъ ближайшаго низшаго наименованія, заключающихся въ одной единицѣ наименованія высшаго. На это должно быть обращаемо вниманіе учащихся, дабы они поняли, что вопросъ превращенія есть, строго говоря, лишь одинъ изъ тѣхъ многочисленныхъ вопросовъ, которые требуютъ примѣненія только кратнаго сравненія. Отъ этихъ простѣйшихъ задачъ на превращеніе надо перейти къ вопросу превращенія, требующаго болѣе одного дѣйствія.

Превращеніе съ помощью умноженія.

Но прежде всего при этомъ надо помнить, что вопросы на превращеніе должны быть для учениковъ интересны, и самымъ цѣлесообразнымъ является въ этомъ случаѣ вопросъ о величинѣ милліона. Вопросъ же о превращеніи, напр., одного милліона долей въ пуды естественно приводитъ къ необходимости опредѣленія — сколько въ одномъ пудѣ всего долей. Этотъ вопросъ допускаетъ двоякое рѣшеніе, исходящее изъ единицъ низшаго, либо же изъ единицъ наивысшаго наименованія, и даже не напоминающее обычнаго, — наиболѣе короткаго, но наименѣе вытекающаго изъ условій вопроса,—способа превращенія.

Первый способъ рѣшенія этой задачи:

I) Сколько долей въ золотникѣ?
1 зол. = 96 долей (нѣтъ дѣйствія!)

II) Сколько долей въ лотѣ?
96 дол. × 3 = 288 долей.

III) Сколько долей въ фунтѣ?
288 долей × 32 = 9216 долей.
864
576

IV) Сколько долей въ пудѣ?
9216 д. × 40 = 368 640 долей.

V) Сколько пудъ въ одномъ милліонѣ долей?
1 000 000 : 368 640 = 2.
— 737 280
262 720

Такимъ образомъ получится отвѣтъ на ближайшій вопросъ, а именно, что въ милліонѣ долей всего 2 пуда и, сверхъ того, остается 262 720 долей. Послѣ этого можетъ быть предложенъ вопросъ: сколько фунтовъ въ этомъ остаткѣ, и для рѣшенія этого вопроса можно воспользоваться отвѣтомъ строки III-ей, изъ которой вытекаетъ, что въ фунтѣ 9 216 долей, и опредѣлить — сколько разъ 9 216 содержится въ 262 720-ти, и т. д.

Второй способъ рѣшенія, исходя изъ единицъ высшаго наименованія, ведетъ къ слѣдующимъ вопросамъ:

I) Сколько фунтовъ въ пудѣ?
1 п. = 40 фунтовъ (нѣтъ дѣйствія!)

II) Сколько лотовъ въ пудѣ?
32 л. × 40 = 1 280 л.

III) Сколько золотниковъ въ пудѣ?
3 зол. × 1 280 = 3 840 зол.

IV) Сколько долей въ пудѣ?
96 дол. × 3 840 = 368 640
384 000
— 15 360

V) Сколько пудовъ въ милліонѣ долей?
1 000 000 : 368 640 = 2.
— 737 280
262 720

Отвѣтъ—тотъ же. Производить ли дѣйствія надъ числами именованными, какъ это сдѣлано выше, или же надъ отвлеченными (что гораздо изящнѣе),—все равно. Важно то, что дѣйствіе дѣленія произведено только одинъ разъ, остальныя же дѣйствія — умноженія. — Когда это усвоено, можно точно такъ же, какъ и выше, задаться вопросомъ о томъ—сколько единицъ слѣдующаго высшаго наименованія, т. е. фунтовъ составляетъ остатокъ, т. е. 262 720 долей.—Этотъ вопросъ, рѣшенный такимъ же образомъ, дастъ отвѣтъ: въ 262 720 доляхъ содержится 28 ф. и, сверхъ того, еще 4 672 доли. (Такимъ образомъ ученикъ пріучается къ уразумѣнію самаго вопроса превращенія, — вопроса, по существу своему, чуждаго интересамъ ученика). Въ одномъ милліонѣ долей содержится 2 п. 28 ф. и еще 4 672 доли. — Относительно этихъ долей зарождается новый вопросъ: сколько онѣ составляютъ лотовъ? Оказывается, что въ этомъ числѣ долей содержится 16 лотовъ и, сверхъ того, еще 64 доли. Итакъ:

1 000 000 долей = 2 пуда 28 ф. 16 лот. 64 д.

Упомянемъ пріемъ

Когда ученики вполнѣ усвоили, на нѣсколькихъ примѣрахъ, ходъ разсужденій, приводящихъ къ рѣшенію вопроса на превращеніе съ помощью ряда умноженій и одного дѣленія, притомъ—также и самостоятельно рѣшая эти задачи, можно выяснить—какъ утомителенъ этотъ способъ обращенія простого именованнаго числа въ равное ему составное, въ которомъ число единицъ каждаго наименованія меньше единичнаго отношенія единицы ближайшаго наименованія къ единицѣ даннаго наименованія, т. е. въ число, въ которомъ пудовъ было бы менѣе 10-ти (ибо 10 пуд. ужъ составляетъ одинъ берковецъ), фунтовъ—менѣе сорока, лотовъ—менѣе 32-хъ, золотниковъ — менѣе 3-хъ, долей — менѣе 96-ти. Учитель не долженъ бояться при этомъ потери времени, ибо никакой тутъ потери времени нѣтъ, такъ какъ это—только рѣшеніе задачи, притомъ нисколько не менѣе поучительной, чѣмъ обычныя задачи съ условіями относительно купли, продажи, дохода, стоимости чего-либо.

Превращеніе съ помощью дѣленія.

Только когда вопросы превращенія разрѣшены съ точки зрѣнія логической, можно предложить себѣ вопросъ—нельзя ли задачи этого рода разрѣшать не съ помощью ряда умноженій и одного дѣленія, а съ помощью однихъ дѣленій, т. е. нельзя ли составить такой планъ рѣшенія: сначала узнать—сколько въ одномъ милліонѣ долей всего золотниковъ, потомъ—сколько лотовъ составляетъ это число золотниковъ, далѣе—сколько фунтовъ въ полученномъ числѣ лотовъ, и, наконецъ,—сколько пудовъ въ этомъ числѣ фунтовъ? При этомъ могутъ получиться и остатки, которые тоже крайне важны. Сначала можно эти вычисленія располагать такъ:

I) 1000000 дол. : 96 дол. = 10 416,

96	Это значитъ, что въ милліонѣ долей золотниковъ 10 416 и, сверхъ того, 64 доли. Записать рядомъ съ частнымъ 10 416, но послѣ точки съ запятою, можно слѣдующее (см. ниже): 10 416 зол.
400	
384	
160	
96	
640	
576	
64 дол.	

II) 10 416 зол. : 3 зол. = 3 472; 3 472 лота.

Это значитъ, что 10 416 зол. = 3 472 лот. и что, сверхъ того, отдѣльныхъ золотниковъ, не составляющихъ цѣлаго лота, въ этомъ числѣ нѣтъ.

III) 3472 лота : 32 л. = 108; 108 фунт.

32	Это значитъ, что въ 3 472 лотахъ содержится 108 фунтовъ и, сверхъ того, еще 16 лотовъ.
272	
256	
16 лот.	

IV) 108 фунт. : 40 фунт. = 2; 2 пуда.

80	Это значитъ, что въ 108 фунтахъ содержится 2 пуда и еще, сверхъ того, 28 фунтовъ.
28 фунт.	

Отв.: 1 000 000 дол. = 2 п. 28 ф. 16 л. 64 доли.

Запись вычисленія. Когда ученики усвоили себѣ вполнѣ всѣ вычисленія (причемъ частныя надо записывать, конечно, безъ наименованій), то можно показать имъ, что вычисленія эти можно располагать также иначе, притомъ несравненно короче, а именно такъ (безъ всякихъ наименованій, ибо они внесли бы путаницу и несогласны съ самымъ смысломъ дѣленія: отношеніе одного именованнаго числа къ другому именованному же числу можетъ быть числомъ только отвлеченнымъ):

а) 1 000 000 : 96 (безъ знака равенства!)

96	10 416 : 3		
40 0	0	3 472 :	32
38 4	(зол.)	3 2	108 : 40
1 60		272	80 2
96		256	28
640		16	(фунт.)
576		(лот.)	
64			
(дол.)			

Отв.: 1 000 000 долей = 2 п. 28 ф. 16 л. 64 зол.

б) Слѣдующій способъ распредѣленія вычисленій еще удобнѣе, потому что онъ требуетъ еще меньше времени и, при краткости, еще прозрачнѣе предыдущаго:

96	3	32	40
1000000	10416	3472	108 | 2
96	0	32	80 (пуды)
400	(золот-	272	28
384	ники)	256	(фунты)
160		16	
96		(лоты)	
640			
576			
64			
(доли)			

При этомъ послѣднемъ способѣ расположенія вычисленій дѣлитель пишется надъ вертикальною чертою, а частное рядомъ съ дѣлителемъ, слѣдующій дѣлитель — надъ второю вертикальною чертою и т. д. Наименованій дѣлимыхъ, дѣлителей и отношеній и въ этомъ случаѣ писать не надобно. Дабы легче было разобраться въ наименованіяхъ окончательнаго результата, можно ихъ писать подъ дважды подчеркнутыми остатками, притомъ въ скобкахъ. Хотя необходимости въ этомъ, конечно, нѣтъ, но польза этихъ отмѣтокъ несомнѣнна.

При такой, исключительно методической, а потому вначалѣ довольно медленной, разработкѣ вопроса о превращеніи простого именованнаго числа въ составное такъ называемаго „правильнаго“ вида, ученіе это для учениковъ представляетъ значительно большій интересъ, нежели ничѣмъ необъяснимое требованіе учителя дѣлать превращеніе согласно общепринятой формѣ записи нужныхъ вычисленій, — формѣ, для учениковъ совершенно не вытекающей изъ сущности вопроса. Превращеніе именованныхъ чиселъ составляетъ содержаніе № 193 „Задачника для учителей“ и №№ 194—200 „Задачника для учениковъ“.

Сложеніе и умноженіе составн. именов. чис.

Превращеніе именованныхъ чиселъ иногда требуется при сложеніи и умноженіи составныхъ именованныхъ чиселъ: эти два дѣйствія даютъ иногда въ результатѣ числа, подлежащія превращенію. Примѣровъ учитель можетъ придумать и самъ сколько угодно (задачи съ условіями въ этихъ случаяхъ вовсе не необходимы), но ученики должны уяснить себѣ, что дѣло не столько въ самомъ сложеніи, сколько въ преобразованіи составного именованнаго числа неправильнаго вида въ составное именованное вида правильнаго.—Запись производства дѣйствія можетъ быть практикуема слѣдующая:

I)
32 ф. 27 лот. 2 зол. 87 дол.
16 „ 30 „ 1 „ 36 „
23 „ 25 „ 2 „ 69 „
8 „ 31 „ 2 „ 76 „
2 пуда 2 ф. 20 лот. — зол. 76 дол.

Первая запись. Послѣдняя.

II) 79 фунтовъ 113 лот. 7 зол. 268 дол.

III) 268 : 96 IV) 7 зол. + 2 з. + 9 з.;
192 2 V) 9 зол. = 3 лота;
76
(доли)

Вторая запись.

VI) 113 лот. + 3 л. = 116 лот.

VII) 116 : 32 VIII) 79 ф. + 3 ф. = 82 ф.
96 3 IX) 82 ф. = 2 п. 2 ф.
20
(лоты)

Третья запись.

Вспомогательныя вычисленія.

Тѣ числа, которыя попадутъ въ отвѣтъ, должны быть дважды подчеркнуты.— Запись вычисленій при умноженіи должна быть производима также согласно логическимъ

требованіямъ, предъявляемымъ къ записи рѣшенія задачи, и подобно вышепоказанному образцу записи вычисленій при сложеніи. — Но, независимо отъ записи, всѣ вычисленія при сложеніи и умноженіи составныхъ именованныхъ чиселъ должны быть таковы, чтобы то, что можетъ быть сдѣлано изустно, дѣлалось непремѣнно изустно, а только не поддающееся быстрому изустному вычисленію отдѣльно вычислялось бы письменно. (№ 201 „Задачника для уч—лей“ и №№ 202 и 203 „Задачника для уч—ковъ“ содержатъ въ себѣ упражненія въ сложеніи и умноженіи составныхъ именованныхъ чиселъ). — Само собою разумѣется, что къ той же, 25-й, ступени относится и производство дѣленія составного именованнаго числа на извѣстное число одинаковыхъ частей (204—205 „Задачника для уч—лей“ и №№ 206—208 „Задачника для учениковъ“). Особенное вниманіе учитель долженъ обращать на то, чтобы: а) ученики не раздробляли всего дѣлимаго,—къ каковому, совершенно излишнему, преобразованію иногда замѣчается въ нѣкоторыхъ ученикахъ трудно преодолимая склонность; б) чтобы письменно дѣлались при раздробленіи лишь весьма немногія дѣйствія, и в) чтобы ученики пріучались къ надлежащей записи производимыхъ дѣйствій.—Запись можетъ быть слѣдующая:

7 п. 20 ф. 7 зол. 53 доли | 45 = 6 ф. 64 зол. 16 д.

40 ф. × 7 = 288 ф.;
300 ф. (раздѣли на 45 и частное запиши послѣ
270 знака равенства!)
30 ф. = 96 зол. × 30 = 2 880 зол.
2887 зол. (разд. на 45 и т. д.)
270
187
180
7 зол. = 96 д. × 7 = 672 доли
725 дол. (раздѣли на 45
45 и т. д.)
275
270
5 дол. (ост.)

Дѣленіе сост. именов. чиселъ на данное число одинак. частей

Относительно ученій о двоякаго рода преобразованіяхъ именованныхъ чиселъ и о дѣйствіяхъ надъ ними не безполезно замѣтить еще слѣдующее. Прежде

всего учащій и ученики не должны ни на минуту забывать, что раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ суть не дѣйствія надъ этими числами, а лишь извѣстныя преобразованія. Это—преобразованія, помощью ариѳметическихъ дѣйствій, однѣхъ величинъ въ другія, съ ними однородныя и вполнѣ равныя имъ по своему значенію. Далѣе, что касается дѣйствія кратнаго сравненія простыхъ и составныхъ именованныхъ чиселъ (т. е. кратнаго сравненія двухъ величинъ и дѣленія составныхъ именованныхъ чиселъ на извѣстное число одинаковыхъ частей), то только на этой ступени обученія учащіеся вполнѣ постигаютъ всю громадную важность разграниченія дѣленія на извѣстное число равныхъ частей и такъ наз. дѣленія по содержанію (т. е. собственно дѣленія и кратнаго сравненія). Кратное сравненіе двухъ именованныхъ чиселъ обыкновенно называютъ дѣленіемъ именованнаго числа на именованное, а дѣленіе именованнаго числа на извѣстное число одинаковыхъ частей называютъ дѣленіемъ именованнаго числа на отвлеченное. Но ученикамъ слѣдуетъ замѣтить себѣ не только эти названія, но и вполнѣ усвоить себѣ слѣдующую особенность получаемыхъ частныхъ: при кратномъ сравненіи получается число непремѣнно отвлеченное, при дѣленіи же именованнаго числа на отвлеченное число въ частномъ получается число непремѣнно именованное (простое или же составное). Это—крайне важно и на этой ступени обученія.

Раздѣленіе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ.

§ 13. На 25-й ступени, въ качествѣ самостоятельныхъ упражненій, ученикамъ могутъ быть предложены задачи (напр., подъ №№ 209—234). Но прежде чѣмъ ученикамъ приступить къ разрѣшенію этихъ задачъ, учитель долженъ принять во вниманіе принятое выше (см. § 10 главы II) раздѣленіе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ на приведенныя и неприведенныя. Само собою разумѣется, что раньше всего учитель долженъ научить дѣтей рѣшенію прозрачныхъ, т. е. приведенныхъ задачъ (при этомъ аналитическій способъ рѣшенія, о которомъ рѣчь идетъ въ § 22 гл. VI, окажется почти совсѣмъ непримѣнимымъ). Затѣмъ учитель можетъ перейти къ рѣшенію съ ними, подъ его руководствомъ, тѣхъ же задачъ, но въ неприведенномъ видѣ, и только когда это исполнено, дозволить себѣ предлагать имъ сложныя неприведенныя задачи для болѣе самостоятельной работы.—Дабы это дѣло облегчить учителю, ниже приводятся два текста нѣкоторыхъ задачъ:

Неприведенныя.

210. Торговецъ чаемъ продалъ въ теченіе дня одного сорта чаю на 38 р. 50 к., а другого на 38 р. 80 к.; фунтъ чаю перваго сорта стоитъ 1 р. 10 к., а фунтъ второго—1 р. 40 к. Сколько чаю обоихъ сортовъ онъ всего продалъ въ теченіе дня?

211. Четверка лошадей стоитъ 700 руб., барышникъ уступаетъ купцу любую изъ этихъ лошадей со сбруей за 190 руб. Во что онъ цѣнитъ сбрую?

212. Лавочникъ купилъ на пробу въ магазинѣ разныхъ сортовъ чаю; фунтъ перваго сорта стоитъ 3 руб. 27 коп.; фунтъ второго на 45 коп. дешевле; фунтъ третьяго сорта на 32 коп. дешевле второго; фунтъ четвертаго на 50 коп. дешевле третьяго. Спрашивается: сколько фунтовъ чаю перваго сорта онъ можетъ купить на 13 руб. 8 коп., сколько второго—на 19 руб. 74 коп.; третьяго—на 30 руб., и сколько четвертаго—на 34 руб.?

213. Крестьянка купила въ городѣ 17 аршинъ ситцу одного сорта и вчетверо больше ситцу другого; аршинъ ситцу перваго сорта стоитъ 14 коп.; на весь ситецъ она истратила 10 руб. 54 коп. Почемъ ей обошелся аршинъ ситцу второго сорта?

214. Фабрикантъ ежегодно платитъ за сырой матеріалъ 85 600 р. государственныхъ и земскихъ повинностей 100 руб., рабочимъ на 400 руб. больше, чѣмъ сколько онъ расходуетъ на сырой матеріалъ; за помѣщеніе онъ платитъ ровно вдвое больше, чѣмъ сколько у него выходитъ на государственныя и земскія повинности. Сколько онъ получаетъ чистаго дохода въ годъ, если онъ съ фабрики выручаетъ въ теченіе года 200 000 руб.?

215. Землевладѣлецъ желаетъ пріобрѣсти домъ въ городѣ; владѣлецъ этого дома предлагаетъ ему слѣдующія условія: землевладѣлецъ долженъ построить на своей землѣ мельницу и домъ для житья; этотъ домъ и мельницу вмѣстѣ съ четырьмя-стами десятинъ земли домовладѣлецъ беретъ себѣ взамѣнъ дома и приплачиваетъ 1 500 руб. Во что онъ цѣнитъ свой домъ, если десятина этой земли стоитъ 80 рублей и если по-

Приведенныя.

Торговецъ продалъ въ теченіе дня чаю на 38 р. 50 к. по 1 р. 10 к. за фунтъ, а также—на 23 р. 80 к. чаю, по 1 р. 40 к. за фунтъ. Сколько чаю обоихъ сортовъ онъ всего продалъ въ теченіе дня?

Четвертка лошадей стоитъ 700 р.; всѣ лошади стоятъ поровну; вмѣстѣ со сбруей каждая лошадь стоитъ 190 руб. Что стоитъ сбруя?

Фунтъ чаю перваго сорта стоитъ 3 р. 27 к.; этого чаю куплено на 13 р. 8 к.; фунтъ второго сорта стоитъ на 45 коп. дешевле, чѣмъ фунтъ перваго сорта, и такого чаю куплено на 19 р. 74 коп.; фунтъ чаю третьяго сорта стоитъ на 32 коп. дешевле второго, и такого чаю куплено на 30 руб.; фунтъ четвертаго сорта стоитъ на 50 коп. дешевле третьяго, и такого чаю куплено на 34 р. И т. д.

Крестьянка купила въ городѣ 17 арш. ситцу, по 14 коп. за аршинъ, и еще ситцу другого сорта; на весь ситецъ она истратила 10 р. 54 к.; ситцу второго сорта она купила въ четыре раза больше, чѣмъ ситцу перваго сорта. Спрашивается, почемъ ей обошелся аршинъ ситцу второго сорта?

Фабрикантъ платитъ за сырой матеріалъ 85 600 руб.; рабочимъ на 400 руб. больше, чѣмъ за сырой матеріалъ; государственныхъ и земскихъ повинностей онъ уплачиваетъ 100 рублей, а за помѣщеніе—вдвое больше, чѣмъ сколько у него выходитъ на государственныя и земскія повинности; всего онъ выручаетъ 200 000 руб. И т. д.

Землевладѣлецъ желаетъ пріобрѣсти домъ въ городѣ; владѣлецъ этого дома предлагаетъ ему слѣдующія условія: землевладѣлецъ долженъ построить на своей землѣ домъ и мельницу, на которые онъ долженъ затратить 3 500 р.; этотъ домъ и мельницу и, сверхъ того, 400 десятинъ земли стоимостью по 80 р. за десятину, онъ долженъ отдать домовладѣльцу, а взамѣнъ всего этого онъ получитъ, кромѣ дома въ горо-

стройка мельницы и дома обойдется въ 3 500 руб.?

216. Фунтъ чаю дороже фунта сахару въ 10 разъ; куплено 30 фунтовъ сахару и нѣсколько фунтовъ чаю; за все заплачено 50 р. 40 к. Сколько куплено чаю, если фунтъ его стоитъ 1 р. 80 коп.?

217. У мѣдника 245 пуд. мѣди: одну седьмую долю этого количества мѣди онъ употребилъ на выдѣлку кастрюль, а остальное на выдѣлку котловъ; на каждую кастрюлю пошло 14 фунтовъ мѣди, а на каждый котелъ—6 пудовъ. Сколько онъ изготовилъ кастрюль и сколько котловъ?

дѣ, еще 1 500 р. наличными деньгами. Во что домовладѣлецъ цѣнитъ свой домъ?

Фунтъ чаю стоитъ 1 р. 80 коп.; фунтъ чаю дороже фунта сахару въ 10 разъ; куплено 30 фунтовъ сахару и нѣсколько фунтовъ чаю, и за все заплачено 50 руб. 40 коп. Сколько куплено чаю?

У мѣдника 245 пудовъ мѣди; одну седьмую долю этого количества мѣди онъ употребилъ на выдѣлку котловъ, и на каждый котелъ пошло 6 пудовъ мѣди; остальную мѣдь онъ употребилъ на выдѣлку кастрюль, и т. д.

Особенности курса 2-го года. § 14. Особенности курса 2-го года обученія въ начальной одноклассной школѣ могутъ быть ярче освѣщены, если мы сравнимъ его съ курсомъ перваго года. Въ этомъ послѣднемъ письменное производство дѣйствій встрѣчается только при письменномъ сложеніи и вычитаніи многозначныхъ чиселъ (ср. § 1 и § 18 гл. IV). Въ курсѣ же второго года изустныя вычисленія встрѣчаются только въ качествѣ вспомогательныхъ, главное же содержаніе курса сводится къ усвоенію письменныхъ способовъ нѣкоторыхъ вычисленій надъ цѣлыми числами и къ усвоенію расположенія этихъ письменныхъ вычисленій. — Термины: слагаемое, сумма, уменьшаемое и т. д. могутъ встрѣчаться, но сущность курса заключается не въ томъ, чтобы дѣти усвоили себѣ эти термины и ихъ опредѣленія или подробныя и точныя п р а в и л а дѣйствій, а главнымъ образомъ—самое умѣніе производить дѣйствія и примѣнять ихъ твердо, безошибочно и быстро къ рѣшенію не слишкомъ сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ и къ преобразованіямъ именованныхъ чиселъ (простыхъ и составныхъ) и дѣйствіямъ надъ именованными числами. Ученики должны освоиться съ главнѣйшими послѣдовательными единичными отношеніями единицъ мѣры: д л и н ы (версты, сажени, аршина, вершка и т. п.), в ѣ с а (пуда, фунта, лота и т. п.), ц ѣ н н о с т е й (имперіала, полуимперіала, пятирублевой золотой монеты, рубля, копейки и др.), а если возможно—и остальныхъ, какія учитель найдетъ возможнымъ или необходимымъ. Но сводить дѣйствія надъ именованными числами и преобразованія надъ ними, какъ это дѣлаютъ нѣкоторые авторы, къ п р а в и л а м ъ, относящимся до единичныхъ отношеній, не всегда возможно во второй годъ. Особенной въ томъ надобности не представляется даже и въ третій годъ обученія. Въ особенности послѣднее справедливо, если на вычисленіе надъ именованнымъ числомъ установлена та точка зрѣнія, что вопросы о раздробленіи и превращеніи именованныхъ чиселъ и даже о четырехъ дѣйствіяхъ представляютъ собою не иное что, какъ болѣе или менѣе сложную чисто-ариѳметическую задачу съ условіями, ведущую, при своемъ разрѣшеніи, къ нѣкоторому ряду дѣйствій и такъ наз. «строчекъ».

Относительно тѣхъ единицъ мѣры, которыя не подлежатъ проработкѣ съ учениками средняго отдѣленія, должно помнить слѣдующее. Ознакомленіе съ мѣрами поверхностей и объемовъ во второй годъ обученія навряд-ли цѣлесообразно. Дѣло въ томъ, что ознакомленіе съ этими мѣрами предполагаетъ у учащихся нѣкоторыя геометрическія представленія и свѣдѣнія, требующія для своего усвоенія затраты довольно большого количества времени, котораго у средняго отдѣленія вовсе не много. Неумѣстны, по этой послѣдней причинѣ, во второй годъ и вообще задачи замысловатыя, а въ частности задачи на чисто-календарныя вычисленія.

Наименованіе чиселъ. § 15. Существуетъ вопросъ о томъ, снабжать ли записи чиселъ, подлежащихъ дѣйствію, наименованіями или же производить дѣйствія только надъ отвлеченными числами. Наиболѣе вѣское возраженіе противъ снабженія записей чиселъ наименованіями состоитъ въ томъ, что ариѳметическія дѣйствія, строго говоря, совершаются только надъ о т в л е ч е н н ы м и числами. Но этотъ взглядъ для занимающаго насъ, практическаго, курса ариѳметики не представляется заслуживающимъ особеннаго вниманія. Запись числа, благодаря освобожденію ея отъ наименованія, конечно, становится болѣе математическою. Но, на практикѣ, въ отвѣтѣ строчки все-таки надобно проставлять наименованіе, такъ какъ это только облегчаетъ дальнѣйшую работу. Мнѣніе же, высказанное г. Арженіковымъ въ его книгѣ по методикѣ ариѳметики и сводящееся къ тому, что есть задачи, въ которыхъ снабженіе наименованіемъ прямо невозможно, принадлежитъ къ числу спорныхъ. Въ а р и ѳ м е т и к ѣ столь же неудобно умножать число быковъ на отвлеченное число, какъ нельзя умножать и извѣстнаго числа рублей на какое-либо отвлеченное число. (См. вторую часть „Методики“ Шохоръ-Троцкаго, стр. 84). Но на первыхъ порахъ, въ особенности въ одноклассной начальной школѣ, въ приготовительныхъ классахъ и вообще при обученіи малолѣтнихъ, нельзя ничего имѣть противъ подобныхъ, чисто условныхъ, записей. Даже запись 5 кор.$\times$8 можно истолковать только въ томъ смыслѣ, что требуется узнать, сколько будетъ всего коровъ, ежели у насъ есть 5 коровъ, да еще 5 коровъ, да еще 5 коровъ и т. д. до тѣхъ поръ, пока не наберется восьми „стойлъ“, восьми г р у п п ъ, по 5 коровъ въ каждой группѣ. — За-то съ тѣмъ большею осторожностью надо относиться къ наименованію, когда этого наименованія ни писать, ни даже произносить не надо: мы говоримъ о тѣхъ ошибкахъ, которыя дозволяютъ себѣ ученики, говоря, что надо р у б л и помножить на д е с я т и н ы, или р у б л и раздѣлить на к у л и, и т. д. Есть случай, когда прямо н е о б х о д и м о называть наименованіе дѣлителя. Это—случай, когда и дѣлимое, и дѣлитель—именованныя числа, а именно: когда требуется раз-

дѣлить данное именованное число на извѣстныя части, изъ которыхъ каждая равна другому именованному числу. Тогда не только можно сказать, что 8 рублей требуется раздѣлить на 40 коп., но необходимо это и записать такъ: 8 р. : 40 к. = 20.

Изустныя вычисленія.

§ 16. Какое мѣсто въ курсѣ второго года занимаютъ изустныя вычисленія? Если не считать классныхъ упражненій въ вычисленіяхъ этого рода съ помощью „Таблицы" (ср. § 5 главы II),—упражненій, часто прямо необходимыхъ, притомъ не только для внесенія разнообразія въ занятія,—то упражненія въ изустныхъ вычисленіяхъ, кромѣ того, должны занимать весьма важное служебное мѣсто въ курсѣ второго года. Когда мы говоримъ объ ариѳметикѣ, то подъ этимъ словомъ мы непремѣнно должны разумѣть ариѳметику въ полномъ смыслѣ этого слова, — не только ариѳметику цифирную, письменную, обыкновенно излагаемую въ учебникахъ по этому предмету, но и изустную. Отказаться отъ изустнаго вычисленія въ курсѣ ариѳметики перваго года обученія значитъ отказаться отъ ариѳметики совсѣмъ. Отказаться же отъ изустнаго вычисленія въ курсѣ ариѳметики второго года значитъ отказаться едва-ли не отъ лучшей ея части,—лучшей съ точки зрѣнія практической и образовательной. Это значитъ также лишить своихъ учениковъ возможности пользоваться своими силами и здравымъ смысломъ. Поэтому всякое вычисленіе, которое требуется сдѣлать, ученикъ долженъ сдѣлать изустно, если изустное вычисленіе цѣлесообразнѣе письменнаго, и письменно, если изустное затруднительно, а письменное болѣе цѣлесообразно.

Метода цѣлесообразныхъ задачъ.

§ 17. Въ какой мѣрѣ „метода цѣлесообразныхъ задачъ" примѣнима въ курсѣ 2-го года обученія? Въ первый годъ обученія простыя задачи, въ собственномъ смыслѣ этого слова, положены въ самую основу курса. Съ задачъ, при методѣ цѣлесообразныхъ задачъ, въ первый годъ начинается урокъ; задача дѣлается исходною точкою, когда приходится обратиться къ новому ариѳметическому представленію, будь то представленіе о сущности умноженія однозначнаго числа на однозначное же, будь то двоякій смыслъ дѣленія, условное значеніе словъ „на столько-то больше", будь то смыслъ доли или части, и т. д.; задача является необходимымъ условіемъ выработки всякаго ариѳметическаго представленія. При этомъ цѣлый рядъ однородныхъ задачъ предлагается, при точномъ слѣдованіи этой методѣ, не для пріобрѣтенія умѣнья рѣшать задачи именно этого рода, не ради того, что этотъ типъ задачъ можетъ оказать особенное вліяніе на

умственное развитіе учащагося, а только ради выработки вѣрнаго представленія о томъ или иномъ ариѳметическомъ ученіи или о какой-либо ариѳметической истинѣ. (Метода цѣлесообразныхъ задачъ въ первый годъ обученія стремится къ выработкѣ вѣрныхъ ариѳметическихъ представленій, а не понятій, каковыя послѣднія вырабатываются уже на почвѣ представленій впослѣдствіи.) Въ курсѣ второго года собственно задачамъ съ условіями не приходится придавать столь же большого значенія. Здѣсь мѣсто задачи съ условіями занимаютъ преимущественно численные примѣры, т. е. опять-таки задачи, но съ отвлеченными числами. Примѣры, однако же, должны быть подчинены требованіямъ цѣлесообразности и занимать то же мѣсто, какое въ курсѣ перваго года занимаютъ простыя „задачи съ условіями". Съ вычисленія наиболѣе цѣлесообразнаго начинается урокъ, вычисленіе численнаго примѣра дѣлается исходной точкой, когда приходится обратиться къ новому представленію ариѳметическаго содержанія, будь то умноженіе на 10, на другую единицу высшаго разряда или на многозначное число, будь то представленіе о раздробленіи именованныхъ чиселъ, о дѣленіи на круглое двузначное число или на число закругляемое, будь то выработка представленія о дроби, и т. д. Примѣръ численный въ курсѣ второго года,—притомъ примѣръ цѣлесообразно, а не только случайно взятый,—является въ этомъ курсѣ необходимѣйшимъ условіемъ для выработки вѣрнаго представленія о данномъ способѣ ариѳметическаго вычисленія и долженъ не слѣдовать за правиломъ, а предшествовать ему. Но это мѣсто примѣра совершенно согласуется съ требованіями метода „цѣлесообразныхъ задачъ", какъ методы обученія. Почему въ этомъ курсѣ примѣру, а не „задачѣ съ условіями" должно придаваться такое значеніе? Дѣло въ томъ, что 2-ой годъ обученія ариѳметикѣ преслѣдуетъ почти исключительно цѣль усвоенія учениками способовъ производства разныхъ вычисленій надъ цѣлыми числами. При этомъ рядъ однородныхъ примѣровъ предлагается не ради пріобрѣтенія учениками умѣнія производить вычисленія по ранѣе выученнымъ опредѣленіямъ и правиламъ и не ради того, что эти вычисленія оказываютъ на умственное развитіе учениковъ какое-либо особенное вліяніе, а ради выработки вѣрнаго представленія о способѣ вычисленія, почему-либо важномъ въ ариѳметикѣ. Задачи же съ условіями въ курсѣ 2-го года занимаютъ мѣсто только полезнаго упражненія въ примѣненіи четырехъ дѣйствій къ житейскимъ вопросамъ, по возможности не выходящимъ

за предѣлы круга представленій учениковъ этого возраста и развитія. Особенно важны нетрудные денежные расчеты.

Значеніе десятичной системы. Значеніе десятичной системы счисленія и обозначенія чиселъ арабскими цифрами для производства дѣйствій (ср. § 2 этой же главы) въ курсѣ 2-го года проявляется въ болѣе значительной степени, чѣмъ въ курсѣ 1-го года. Стоитъ сравнить способъ производства дѣйствія умноженія 398 на 267 и числа CCCXCVIII на CCLXVII, чтобы убѣдиться въ томъ, что не только по непривычкѣ, но и по причинамъ внутренняго устройства и смысла римской нумераціи, не пользующейся нулемъ, производство этого дѣйствія надъ числами, обозначенными съ помощью арабскихъ цифръ, удобнѣе и цѣлесообразнѣе, чѣмъ надъ тѣми же числами, обозначенными съ помощью цифръ римскихъ.

Курсъ двухгодичной школы. § 18. Изъ всего вышеизложеннаго легко усмотрѣть, что въ первые два года обученія учащіеся трехгодичной начальной школы должны и могутъ усвоить себѣ всѣ тѣ главнѣйшія ариѳметическія представленія, привычки и умѣнія, которыя наиболѣе важны съ точки зрѣнія не только практическихъ, но и педагогическихъ требованій, предъявляемыхъ къ начальной школѣ. Само собою разумѣется, что тотъ же курсъ начальной ариѳметики, хотя бы и съ нѣкоторыми сокращеніями, можетъ и долженъ быть пройденъ также и въ двухгодичныхъ начальныхъ школахъ. Жизнь можетъ потребовать только того, чтобы нѣкоторыя изъ вышеразсмотрѣнныхъ ученій были, по недостатку времени, исключены изъ курса двухгодичной школы. Но къ ихъ числу не могутъ быть отнесены статьи о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми отвлеченными числами и представленія о простѣйшихъ дробяхъ: половинахъ, четвертяхъ, восьмыхъ. — Курсъ перваго года въ начальной школѣ совпадаетъ, вообще, съ курсомъ приготовительнаго, а курсъ второго года — съ курсомъ перваго класса средне-учебнаго заведенія.

Пособія въ курсѣ второго года. § 19. Въ заключеніе необходимо остановиться на вопросѣ объ употребленіи наглядныхъ пособій при прохожденіи курса, намѣченнаго выше. Эти пособія должны быть двухъ родовъ: 1) пособія, преслѣдующія цѣль ознакомленія дѣтей съ разными единицами мѣры, и 2) пособія, помогающія проработкѣ тѣхъ или иныхъ статей. О пособіяхъ перваго рода всегда должно помнить, что дѣти должны имѣть о нѣкоторыхъ единицахъ мѣры непремѣнно наглядное представленіе. Таковы: величина фута, аршина, дюйма, вершка, фунта, золотника, четверика, и т. п. Извѣстно, что даже взрослые люди не обладаютъ такимъ глазомѣромъ, чтобы безошибочно отложить на бумагѣ или на веревочкѣ длину аршина, фута, дюйма, вершка, и т. п. Было бы поэтому неосновательно требовать отъ дѣтей подобнаго глазомѣра;

но развивать его необходимо и при обученіи ариѳметикѣ. Прямо необходимо, чтобы дѣти изъ опыта знали—что больше: футъ или аршинъ, дюймъ или вершокъ, и знали это не только теоретически и благодаря своей памяти, но также и благодаря наглядному знакомству съ этими мѣрами. Желательно, съ практической точки зрѣнія, подобное знакомство ихъ также и съ величиною метра ($1^1/_2$ аршина безъ полутора вершка или $22^1/_2$ вершка).

Что касается наглядныхъ пособій второго рода, преслѣдующихъ цѣли лучшаго усвоенія четырехъ дѣйствій, то наилучшимъ изъ нихъ должно, рядомъ со „спичками“, считать обыкновенно русскіе счеты. Вычисленію суммъ и разностей на счетахъ необходимо дѣтей учить и научить; въ немъ необходимо упражнятся, притомъ не только для практическихъ надобностей, но и для цѣлей образовательныхъ. Не надо только ради этого вычисленія жертвовать чѣмъ либо важнымъ въ курсѣ. Чтобы найти для него время, необходимо отказаться въ курсѣ второго года не только отъ рѣшенія сколько нибудь замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера, но даже отъ рѣшенія неприведенныхъ сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ. (О томъ, какъ вычислять на счетахъ и когда именно заниматься этимъ дѣломъ съ учениками, ни въ „Методикѣ“, ни въ „Задачникѣ для учителей“ не сдѣлано никакихъ разъясненій). Производство сложенія и вычитанія на счетахъ извѣстно учителю, остальныхъ дѣйствій производить на счетахъ не надо, а время для такихъ упражненій съ учениками удобно всякое (не ранѣе, впрочемъ, 14-ой ступени курса): это только внесетъ разнообразіе въ занятія. — Для выполненія курса 2-го года необходимѣе всего избѣгать слишкомъ сложныхъ чисто-ариѳметическихъ и замысловатыхъ алгебраическихъ задачъ.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Третій годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ.

Характеръ курса первыхъ двухъ лѣтъ обученія. § 1. Производство четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми числами и приложеніе ихъ къ числамъ именованнымъ, какъ мы уже это видѣли выше, могутъ и должны быть пройдены въ первые два года обученія въ начальной трехгодичной школѣ. Возможность эта, однако, обусловливается характерными особенностями разработаннаго выше курса: 1) отсутствіемъ такъ

наз. „изученія“ чиселъ, въ какой бы оно формѣ ни проявлялось, и 2) отсутствіемъ сколько-нибудь замысловатыхъ задачъ и особенно такихъ, къ рѣшенію которыхъ должны быть приложены алгебраическіе пріемы, т. е. задачъ на уравненія. При этомъ отъ прошедшихъ этотъ курсъ также нельзя, конечно, требовать теоретическихъ познаній по ариѳметикѣ: знанія опредѣленій и правилъ наизусть и т. п. Главное вниманіе въ теченіе первыхъ двухъ лѣтъ обученія надо обращать на умѣніе учениковъ справляться съ ариѳметическими вычисленіями и на то, чтобы вычисленія дѣлались вѣрно и болѣе или менѣе быстро, но сознательно и твердо усвоеннымъ образцамъ и чтобы дѣти умѣли вѣрно исполнять то или иное вычисленіе не только механически, но съ толкомъ и съ возможно большимъ разумѣніемъ. Изъ этого, впрочемъ, отнюдь не слѣдуетъ, что быстрое механическое производство вычисленій—умѣніе, не достойное отведенія ему мѣста въ курсѣ ариѳметики. Это умѣніе представляетъ прямо практическую важность, которой нельзя отрицать ни въ какомъ случаѣ, а потому нѣкоторая быстрота въ концѣ-концовъ должна быть учащимися пріобрѣтена. Но не надо преувеличивать значенія быстраго вычисленія, и лучше отвести надлежащее мѣсто этому вычисленію и въ немъ настойчиво упражнять особенно въ теченіе третьяго года обученія.

Характеръ курса 3-го года. Курсъ 3-го года слагается вообще изъ немногихъ составныхъ частей, но ихъ усвоеніе должно удовлетворять слѣдующимъ требованіямъ: 1) рекомендуемому выше курсу начальной ариѳметики слѣдуетъ придать болѣе или менѣе законченный характеръ, для чего могутъ служить какой-нибудь задачникъ ариѳметики, напр., моя „Ариѳметика для начальныхъ школъ“ (Спб. 1903), и рѣшеніе задачъ болѣе сложныхъ и „типичныхъ“; 2) въ этомъ курсѣ не должно, какъ это выше указано, упускать изъ виду умѣніе быстро вычислять изустно, на письмѣ и, при нѣкоторыхъ условіяхъ, также на счетахъ; 3) навыки, соприкасающіеся со свойствами дробей и съ коммерческими вычисленіями (въ особенности съ вычисленіями процентными), а равно сокращенные способы вычисленія, когда они просты и удобны, тоже не должны быть забываемы; 4) курсъ первыхъ двухъ лѣтъ обученія долженъ быть по возможности дополненъ умѣніями, которыя дѣтьми ранѣе не усвоены, напр., умѣніемъ рѣшать задачи на вычисленіе времени, поверхностей и объемовъ, и т. п.; 5) дѣтей должно ознакомить съ нѣкоторыми геометрическими терминами и основными представленіями и взглядами геометріи измѣрительной;

6) дѣтей въ теченіе третьяго года обученія, если останется время, можно ознакомить также со способами рѣшенія болѣе или менѣе сложныхъ, но не слишкомъ сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ (см. пунктъ 1-ый).

Ступени курса 3-го года. § 2. Курсъ ариѳметики, подлежащій усвоенію въ третьемъ отдѣленіи одноклассной начальной школы, распадается на пять ступеней, занимающихъ, среди ступеней полнаго курса ариѳметики въ одноклассной начальной школѣ, мѣста отъ двадцать шестой до тридцатой ступени включительно. Ступень 26-ая содержитъ упражненія, служащія для выработки точныхъ понятій о дѣйствіяхъ сложенія и вычитанія цѣлыхъ чиселъ. 27-ая посвящена выработкѣ точныхъ понятій о дѣйствіяхъ умноженія и дѣленія многозначныхъ чиселъ, и къ ней примыкаютъ нѣкоторыя упражненія въ образованіи дробей, рѣшеніе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ и вопросы о нѣкоторыхъ измѣненіяхъ искомыхъ чиселъ въ зависимости отъ измѣненія чиселъ данныхъ. 28-ая ступень посвящена ученіямъ объ измѣненіяхъ дробей, о преобразованіи однѣхъ дробей въ другія, имъ равныя, и о дѣйствіяхъ надъ дробями. Къ этимъ ученіямъ примыкаютъ рѣшеніе задачъ на т. наз. простое и сложное тройныя правила, а также рѣшеніе наиболѣе часто встрѣчающихся задачъ на процентныя вычисленія, и т. п. 29-ая ступень посвящена задачамъ на вычисленія площадей прямоугольниковъ и основному, первоначальному, представленію о кубическихъ единицахъ мѣры. Наконецъ, 30-ая ступень посвящена задачамъ на вычисленіе промежутковъ времени.

Четвертый годъ обученія. Школы съ четырехгодичнымъ курсомъ (такъ наз. двухкомплектныя) поставлены въ лучшее положеніе, чѣмъ школы съ курсомъ трехлѣтнимъ. Къ четвертому году обученія можетъ быть отнесено полное усвоеніе матеріала, преслѣдующаго усвоеніе ариѳметической терминологіи, а также матеріала, относящагося до дробей обыкновенныхъ и десятичныхъ и до рѣшенія задачъ болѣе или менѣе трудныхъ и даже алгебраическаго характера. Въ четырехгодичной школѣ поэтому къ курсу 3-го года могутъ быть отнесены многочисленныя вычисленія (изустныя, письменныя и на счетахъ), относящіяся до денежныхъ расчетовъ, требующихъ большой быстроты и навыка, съ тѣмъ чтобы теоретическіе элементы курса были перенесены къ курсу четвертаго года. (Для потребностей четвертаго года авторъ этой книги составилъ дополнительный выпускъ „Задачника для учениковъ“, содержащій въ себѣ курсъ четвертаго года обученія).

Съ чего не надо начинать систематизаціи ариом. познаній учениковъ 3-го и 4-го отд.?

§ 3. Въ первые два года ученики начальной школы должны пріобрѣсти вѣрныя ариѳметическія представленія и умѣніе правильно производить четыре дѣйствія надъ цѣлыми числами. Болѣе или менѣе точныя ариѳметическія понятія и умѣніе высказать то, что они знаютъ, языкомъ вполнѣ краткимъ и точнымъ, связнымъ и опредѣлительнымъ, ученики должны пріобрѣсти въ 3-й или 4-ый годъ обученія. Они не только должны умѣть произвести то или иное дѣйствіе и понимать сущность его, но также настолько понимать усвоенное и такъ твердо знать опредѣленія и правила, чтобы быть въ состояніи высказать, формулировать то, что они знаютъ. Извѣстно, что не только для однихъ малолѣтнихъ, но часто и для взрослыхъ, умѣть что-нибудь дѣлать, понимать—почему это такъ дѣлается, сказать—какъ и почему оно такъ дѣлается, наконецъ, самому себѣ отдать отчетъ въ томъ, почему и какъ что-нибудь дѣлается—все вещи разныя. У малолѣтнихъ же умѣніе чаще всего предшествуетъ пониманію, умѣніе сказать что-нибудь иногда тоже предшествуетъ пониманію, а иногда—очень медленно слѣдуетъ за пониманіемъ. Умѣніе же самому себѣ отдать въ чемъ-либо отчетъ и сознательно выразить, формулировать отвлеченную мысль словами приходитъ часто позже всего. Стремиться къ тому (каковое стремленіе особенно вредило успѣхамъ старой, не мето-дической, школы), чтобы ученики все это пріобрѣтали одновременно, значило бы итти наперекоръ требованіямъ и законамъ развитія дѣтскаго духа. Это значитъ также итти въ разрѣзъ съ вытекающимъ изъ этихъ законовъ требованіямъ относительно необходимости преодолѣнія, во всякій моментъ обученія, одной только трудности (начало Коменскаго).

Введеніе въ ариѳметику.

Тѣ отвлеченныя понятія и опредѣленія, которыя обыкновенно устанавливаются въ такъ называемыхъ „введеніяхъ“ къ учебникамъ ариѳметики, понятія о томъ — что такое единица, что такое число, что такое число отвлеченное, именованное, что такое ариѳметика и т. п.,—важны только для систематическаго изложенія и для построенія ариѳметической науки. Въ учебномъ же предметѣ значеніе каждаго изъ этихъ терминовъ не столь велико, какъ въ наукѣ. Кромѣ того, эти понятія и опредѣленія, даже для начинающихъ уже приводить въ нѣкоторую систему свои ариѳметическія познанія учениковъ старшаго отдѣленія, слишкомъ отвлеченны и, можно сказать, безпочвенны и безсодержательны. Поэтому къ содержанію „введеній“ въ учебники ариѳметики надо обратиться попозже, впослѣдствіи,

послѣ того какъ у учениковъ уже развился хотя бы незначительный вкусъ къ логическому установленію отвлеченныхъ понятій. Этого вкуса нельзя даже предполагать у ученика старшаго отдѣленія, который еще не освоился съ опредѣленіями дѣйствій и другихъ менѣе отвлеченныхъ ариѳметическихъ понятій. Равнымъ образомъ не слѣдуетъ начинать приведеніе курса ариѳметики въ систему съ ученія о нумераціи, уже извѣстной ученикамъ изъ исключительно методическаго курса первыхъ двухъ лѣтъ обученія. Нумерація въ связномъ изложеніи вначалѣ кажется ученикамъ безсодержательною и мало-занимательною. Усваивая себѣ нумерацію въ такъ называемомъ связномъ изложеніи, ученики не понимаютъ и не уразумѣваютъ, чего собственно отъ нихъ хотятъ.

2б-ая ступень: сложеніе и вычитаніе.

§ 4. Лучше всего начать приведеніе въ систему ариѳметическихъ познаній учениковъ съ выработки болѣе точныхъ понятій о четырехъ дѣйствіяхъ. (№ 235 „Задачника для уч—лей“ содержитъ упражненія, цѣль которыхъ—выводъ, что сложеніе представляетъ собою замѣну счета). Прежде всего надо достигнуть того, чтобы ученики постигли трудность, а иногда даже прямо невозможность отысканія суммы двухъ чиселъ счетомъ и присчитываніемъ. Трудность эта иногда, при слагаемыхъ значительной величины, такъ велика, что дѣлаетъ подобный счетъ почти невозможнымъ. Выясненіе того, что подобный счетъ требуетъ наглядныхъ пособій (бобовъ, камешковъ, черточекъ и т. п.), взятыхъ въ количествѣ, равномъ числу единицъ второго слагаемаго (такъ какъ въ противномъ случаѣ мы легко забыли бы, сколько мы единицъ уже присчитали), не представляетъ трудностей. Но мало разсказать это ученикамъ. Надо ихъ заставить самихъ поработать въ этомъ направленіи, а не воображеніемъ только постигнуть все, сюда относящееся. Дѣти должны не только понять, что есть вопросы, требующіе сложенія (это они поняли еще въ первый годъ обученія), но также сообразить, что мало одного только знанія, какое дѣйствіе требуется совершить въ данномъ случаѣ, а нужно и умѣніе производить это дѣйствіе наиболѣе разумнымъ образомъ, притомъ вѣрно и болѣе или менѣе быстро. Когда они это сознали какъ слѣдуетъ, то можно съ ними добраться до того опредѣленія суммы двухъ чиселъ, по которому суммою двухъ чиселъ называется то число, которое можно получить, присчитавъ всѣ единицы второго числа къ первому числу *). По-

*) Ниже предполагается, что учитель держится той совокупности опредѣленій и правилъ, которая приведена въ „Ариѳметикѣ для началь-

томъ можно добраться съ ними, положивъ въ основу выводовъ рядъ цѣлесообразныхъ задачъ, до опредѣленій сложенія, слагаемыхъ, до громаднаго значенія (при сложеніи) таблицы сложенія, до разсмотрѣнія разныхъ случаевъ примѣненія этого дѣйствія, и т. д.

Форма опредѣленій. Учитель не вправѣ забывать слѣдующихъ современныхъ, крайне важныхъ и въ методическомъ отношеніи, взглядовъ на всяческія опредѣленія: а) опредѣленія не должныбыть даваемы въ готовомъ видѣ, а должны быть выводимы самими учениками изъ примѣровъ и съ помощью товарищей и учителя; б) окончательную форму опредѣленію можетъ придать учитель, который долженъ постараться о томъ, чтобы ученики къ ней приблизились, благодаря классной работѣ, и чтобы окончательная форма опредѣленія была согласна съ установленною въ учебникѣ; в) опредѣленіе не должно быть даваемо непремѣнно въ такой формѣ: „сложеніемъ называется дѣйствіе“ и т. д., или „суммою называется число“ и т. д., „слагаемымъ называется число“ и т. д. Согласно современнымъ требованіямъ логики, этимъ опредѣленіямъ можно придать и такую, болѣе простую, по своему построенію, форму: „сложить два числа, или одно число съ другимъ, значитъ найти“ и т. д., „если у насъ есть два числа и требуется найти третье, въ которомъ и т. д., то это третье число называется суммою“ и т. п.—Этотъ послѣдній пунктъ крайне важенъ, съ методической точки зрѣнія, при обученіи не только ариѳметикѣ, но и другимъ предметамъ. Нынѣ можно считать совершенно неосновательнымъ то требованіе многихъ учителей, по которому каждое опредѣленіе должно будто бы имѣть непремѣнно форму: „именемъ существительнымъ называется“, „умноженіемъ называется“, „млекопитающимъ называется животное, которое“ и т. п. Учитель, не признающій другихъ формъ опредѣленія, кромѣ сейчасъ приведенной, крайне затрудняетъ усвоеніе дѣтьми самой сущности дѣла; ибо для дѣтей всякія отглагольныя имена существительныя и вообще книжные обороты рѣчи трудны. Такой учи-

ныхъ школъ“ С. Шохоръ-Троцкаго (Спб. 1903, ц. 15 к.). Кто пожелалъ бы вести ознакомленіе учениковъ съ данными этого курса по другому учебнику ариѳметики, тому можно, для этой цѣли, все-таки, пользоваться задачниками, упоминаемыми въ настоящемъ руководствѣ по предмету методики ариѳметики, а равно и даваемыми здѣсь указаніями. Они, можетъ быть, нѣсколько облегчатъ учителю довольно трудную, въ методическомъ отношеніи, проработку этого курса.

тель жертвуетъ сущностью дѣла ради достиженія никому ненужной округленности и призрачной точности опредѣленій. По поводу этой особенности обычныхъ опредѣленій извѣстный нѣмецкій мыслитель, Германъ Лотце, высказываетъ въ своемъ сочиненіи по предмету логики слѣдующія, весьма важныя для учителя, мысли: „Необразованный человѣкъ, къ великому огорченію лицъ, занимающихся логикой, опредѣляетъ „болѣзнь“ слѣдующимъ, извѣстнымъ своею неуклюжестью, образомъ: „болѣзнь—это если кто нибудь нездоровъ“. Такое опредѣленіе, конечно, нуждается въ стилистическомъ исправленіи, но это исправленіе однако-же заключается вовсе не въ томъ, чего столь упрямо требуетъ логика... Мы имѣемъ полное право опредѣлять болѣзнь, исходя и изъ имени прилагательнаго: болѣнъ человѣкъ въ томъ случаѣ, если отправленія его тѣла неправильны и если эта неправильность переходитъ такія-то и такія-то границы... Никакой пользы не приносятъ стремленія къ опредѣленію всякихъ понятій непремѣнно съ помощью именъ существительныхъ (болѣзнью называется и т. д.)... Обычная форма опредѣленій, напротивъ, страдаетъ тѣмъ недостаткомъ, что, благодаря ей, мы слишкомъ сильно привыкаемъ принимать за нѣчто самостоятельное какъ-разъ то, что представляетъ собою именно только нѣкоторое качество или состояніе какого-нибудь предмета. При этомъ мы какъ бы забываемъ, что качество, состояніе или свойство этого предмета само по себѣ, безъ этого предмета, вовсе не существуетъ“. Какъ это пристрастіе къ отвлеченности вредно вообще, а особенно для малолѣтнихъ учениковъ, вовсе не склонныхъ къ игрѣ въ отвлеченности и къ философствованію, само собою разумѣется.

Разнообразіе задачъ, требующихъ сложенія. Очень полезно, ранѣе окончательной отдѣлки опредѣленія сложенія, показать ученикамъ, что цѣль дѣйствія сложенія—одна и та же, какъ бы различны, съ точки зрѣнія своего смысла, ни были задачи, требующія отысканія суммы. Даны, напр., задачи (№ 235 „Задачника для уч—лей“): „У одного мальчика 13 коп., а у другого—29; сколько денегъ у обоихъ?—У третьяго мальчика 13 коп., а у четвертаго на 29 больше. Сколько денегъ у четвертаго мальчика?“ Одинаковы ли послѣднія двѣ задачи? Конечно, не одинаковы: въ первой требуется узнать, сколько денегъ у двухъ мальчиковъ вмѣстѣ, во второй же мы отыскиваемъ не сколько у третьяго и четвертаго мальчиковъ денегъ вмѣстѣ, а сколько денегъ у одного четвертаго. Въ первой мы какъ бы присчитываемъ къ копейкамъ перва-

го копейки второго; во второй же мы деньги третьяго мальчика оставляемъ въ покоѣ, а разсуждаемъ такъ: у четвертаго на 29 коп. больше, чѣмъ у третьяго; это значитъ, что у него есть тоже (свои!) 13 коп. да еще 29 коп. Между тѣми 13-ю коп., которыя есть у третьяго мальчика, и 13-ю коп., къ которымъ мы прибавляемъ при рѣшеніи второй задачи 29, есть та разница, что однѣ принадлежатъ одному, а другія—другому мальчику. Но въ обоихъ случаяхъ мы дѣлаемъ сложеніе: въ первомъ мы прибавляемъ какъ бы къ деньгамъ перваго мальчика деньги второго, во второмъ же къ одной части денегъ второго прибавляемъ другую часть его же денегъ. Это полезно (но, конечно, по возможности просто) разъяснить учащимся. Или возьмемъ такія задачи: „Изъ амбара взято 45 мѣшковъ ржи; осталось ржи 27 мѣшковъ; сколько было ржи въ этомъ амбарѣ? У одного землевладѣльца 450 десятинъ земли; при этомъ извѣстно, что у него на 160 десятинъ меньше, чѣмъ у его сосѣда. Сколько десятинъ земли у его сосѣда?“ Въ первой совершено дѣйствіе вычитанія, а для рѣшенія задачи надо совершить сложеніе. Во второй тоже приходится дѣло перевести на отысканіе суммы. Но если ученикъ только выучилъ опредѣленіе сложенія, не постигнувъ сущности этого дѣла, то ничего не достигнуто. Непремѣнно надо достигнуть того, чтобы ученики постигли цѣль сложенія, пользу и даже необходимость, для сложенія многозначныхъ чиселъ, знанія таблицы сложенія, пользу правила сложенія, отличіе изустнаго сложенія, сложенія на счетахъ и сложенія письменнаго, значеніе арабскихъ цифръ при сложеніи, и т. п. (№ 236). Объ этомъ говорится подробнѣе ниже, въ слѣдующемъ параграфѣ.

Сокращенное отысканіе суммы въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

Вниманіе надо удѣлить также сложенію такихъ чиселъ, гдѣ рабское приложеніе правилъ письменнаго производства сложенія не только нецѣлесообразно, но даже прямо неразумно (№№ 237 и 238). Таково, напр., сложеніе однозначнаго числа единицъ высшаго разряда, напр., 2000 да 3000 да 7000, для какового сложенія не надо ни подписывать слагаемыхъ одно подъ другимъ, ни начинать сложенія съ единицъ низшаго разряда. Таково также прибавленіе 99-ти, 98-ми, 999-ти и т. п. чиселъ, незначительно отличающихся отъ одной единицы высшаго разряда, къ любому другому числу, или же сложеніе четырехъ слагаемыхъ: 999, 998, 998 и 999, которое также не слѣдуетъ дѣлать по правилу письменнаго производства сложенія. Дѣйствительно (обратимся къ послѣднему примѣру): первое

изъ данныхъ слагаемыхъ менѣе тысячи на одну единицу, второе—на двѣ, третье—также на двѣ, и четвертое—на одну единицу; стало быть, сумма этихъ чиселъ менѣе четырехъ тысячъ на шесть единицъ, т. е. равна 3 994-мъ. Ниже мы убѣдимся въ томъ, что, говоря строго и точно, мы такимъ вычисленіемъ только нашли сумму. Но это хорошо, хотя мы и не совершили при этомъ сложенія надъ данными числами въ томъ смыслѣ, какой придается и долженъ придаваться слову „сложеніе“.

Что такое изящное вычисленіе?

§ 5. Не только въ третій и четвертый, но даже въ первые годы обученія дѣтей въ одноклассныхъ начальныхъ школахъ, ученики должны быть научаемы болѣе или менѣе изящному вычисленію. Что это значитъ—„изящное вычисленіе“? Если ученикъ, при умноженіи какого нибудь числа на 98, поступаетъ согласно правилу письменнаго производства умноженія на многозначное число, не зависящему отъ особенностей этого послѣдняго, то это вычисленіе будетъ не изящно. Если же онъ помножитъ множимое на 100 и изъ полученнаго вычтетъ удвоенное множимое, то это будетъ, напротивъ, изящнымъ вычисленіемъ. Такихъ примѣровъ можно привести великое множество. Случаевъ, когда истинное знаніе ариѳметики, какъ совокупности способовъ производства четырехъ дѣйствій, дозволяетъ едва ли не каждое вычисленіе сдѣлать изящно, т. е. сообразно не только съ общими правилами, но и съ требованіями здраваго смысла и требованіями, если такъ можно выразиться, искусства вычисленія,—такихъ случаевъ практика представляетъ гораздо больше, чѣмъ это можетъ показаться съ перваго взгляда человѣку, привыкшему смотрѣть на ариѳметику только съ точки зрѣнія учебниковъ этого предмета.—Невозможно считать такую постановку обученія согласною съ требованіями искусства вычисленія, при которой ученики, на соотвѣтствующей ступени обученія, не умѣютъ сколько-нибудь увѣренно, быстро и безъ карандаша въ рукахъ, безъ ошибокъ въ умноженіи, вычислить—что, напр., стоятъ $19\frac{1}{2}$ ф. говядины, если фунтъ стоитъ $14\frac{1}{2}$ коп., или что стоятъ $2\frac{3}{4}$ ф. чаю, если фунтъ его стоитъ 2 р. 40 к. Большинство учениковъ непремѣнно станетъ обращать $19\frac{1}{2}$ и $14\frac{1}{2}$ въ неправильныя дроби и даже $2\frac{3}{4}$ въ неправильную дробь, въ то время какъ первую задачу легко рѣшить, узнавъ — что стоятъ 20 ф. говядины, а вторую, узнавъ—что стоятъ 3 ф. чаю.—Вотъ почему на 26-й ступени обязательно пріучить дѣтей къ изящному вычисленію суммъ. (Этому вычисленію посвященъ отдѣльный нумеръ „Задачника для

уч—ковъ"). Къ нему у учителя, желающаго сдѣлать обученіе поучительнымъ, занимательнымъ и цѣлесообразнымъ, ежедневно представляется много случаевъ.

Условія употребленія книги въ школѣ.

§ 6. Условія, которыя учителю необходимо соблюдать неукоснительно, если онъ хочетъ съ помощью какого бы то ни было учебника ариѳметики (напр., съ помощью „Ариѳметики для нач. школъ") принести дѣйствительную пользу своимъ ученикамъ и ихъ образованію, сводятся преимущественно къ слѣдующему:

1) Ученики могутъ обращаться къ учебной книгѣ не ранѣе третьяго года обученія въ начальной школѣ, и то—только въ томъ случаѣ, если учитель станетъ непосредственно руководить занятіями учениковъ по этой книгѣ.

2) По содержанію своему, каждый параграфъ и каждая часть его, по книгѣ прорабатываемые учителемъ съ учениками, должны быть ученикамъ хорошо извѣстны. Необходимо, чтобы ученикамъ приходилось, при изученіи учебной книги, работать не надъ содержаніемъ ея, а преимущественно надъ тѣмъ, какъ то или иное ученіе ариѳметики выражено, изложено въ книгѣ, и отчасти надъ тѣмъ, почему оно такъ или иначе выражено.

3) Подготовка къ усвоенію учениками того или иного ученія, той или иной мысли, того или иного правила должна состоять изъ ряда предварительныхъ цѣлесообразныхъ задачъ, вопросовъ и упражненій, имѣющихъ въ виду не только содержаніе предстоящей по книгѣ работы, но и словесное выраженіе, въ которое облечено это содержаніе. Иногда, при этомъ, можетъ оказаться, что работу учениковъ надъ словеснымъ выраженіемъ того или иного ученія надо приноровлять, такъ сказать, подгонять къ избранному въ книгѣ способу изложенія, къ избранной въ ней формулировкѣ.

4) Хотя введенія вообще, и „Введеніе" въ „Ариѳметику для начальныхъ школъ" въ частности, занимаютъ въ книгахъ первое мѣсто, но изученія (изученія, а не усвоенія наизусть!) его содержанія не должно относить къ началу занятій. Его можно вначалѣ совсѣмъ опустить, съ тѣмъ чтобы къ нему обращаться въ разное время, при прохожденіи самаго курса ариѳметики, въ третій или даже въ четвертый годъ обученія. Это не только допустимо, но даже необходимо для учениковъ, еще не интересующихся отвлеченными понятіями. Такъ наз. „введенія" включаются въ книги и ставятся на первое мѣсто только для большей стройности изложенія, для большей систематичности его. Система же изученія предмета дѣтьми, какъ извѣстно, не только не должна, но часто (изъ чисто-психологическихъ основаній) не можетъ совпадать съ системою изложенія его въ книгѣ. При недосугѣ, при недостаточной подготовкѣ учениковъ къ усвоенію ряда сопоставленныхъ въ извѣстномъ порядкѣ терминовъ, наконецъ, при недостаткѣ интереса и вкуса учениковъ къ этимъ тонкостямъ „введеній" можно и совсѣмъ опустить. Ибо что такое единица, отвлеченное число и т. п.,—ученики третьяго отдѣленія и безъ всякихъ введеній понимаютъ, а умѣютъ ли они формулировать ту или иную постановку этихъ вопросовъ—чаще всего для дальнѣйшаго курса не столь важно. Это тѣмъ справедливѣе, что многія изъ тѣхъ понятій, о которыхъ обыкновенно говорится во „введеніяхъ" къ учебникамъ ариѳметики, не всегда принадлежатъ къ числу легко поддающихся вѣрному и понятному опредѣленію. Таковы, напр., понятія о единицѣ, о счетѣ, о величинѣ.

5) Словамъ вообще надо придавать меньше значенія, чѣмъ существу дѣла и идеямъ. А потому выучивать что-бы то ни было изъ этой книги наизусть ученики не должны ни въ какомъ случаѣ. Они должны себѣ хорошенько усвоить мысли и идеи, а не слова. Если данная мысль ариѳметическаго содержанія учениками усвоена, то, послѣ надлежащей проработки относящагося къ ней текста даннаго параграфа, подходящія слова для надлежащаго выраженія этой мысли также найдутся въ распоряженіи учениковъ. Текстъ книги долженъ только упорядочивать ариѳметическое мышленіе учениковъ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, развивать и упорядочивать также и навыкъ учениковъ въ надлежащемъ выраженіи тѣхъ, въ надлежащей формулировкѣ или иныхъ ариѳметическихъ мыслей или правилъ.

Опредѣленія суммы, сложенія и пр.

§ 7. Въ „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ" (Спб. 1903) статья о сложеніи начинается съ примѣра: „Пусть дано 27 какихъ-нибудь предметовъ и еще 9 такихъ же предметовъ. Всѣ эти 9 предметовъ, по одному, къ даннымъ намъ 27-ти предметамъ; тогда мы получимъ, что всѣхъ предметовъ 36". Далѣе выясняется возможность такого присчитыванія любого числа къ любому другому. Затѣмъ идетъ опредѣленіе суммы и указаніе на то свойство суммы двухъ или нѣск. чиселъ, по которому величина ея не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ. Далѣе, ранѣе опредѣленія понятія о сложеніи, указано, что необходимо знать такъ называемую таблицу сложенія, т. е.

знать на-память, какъ велика сумма любыхъ двухъ однозначныхъ чиселъ, и не затрудняться въ быстромъ нахожденіи суммы любого двузначнаго числа съ однозначнымъ. Только послѣ этого устанавливается понятіе о сложеніи: „Сложить какія бы то ни было цѣлыя числа значитъ отыскать сумму этихъ чиселъ, съ помощью таблицы сложенія". Остальныя опредѣленія въ этой главѣ и правила производства дѣйствія сложенія въ этой книгѣ не существенно отличаются отъ обычно приводимыхъ въ учебникахъ.

Происхожденіе сложенія.

Намъ надо уяснить себѣ ту причину, по которой опредѣленіямъ, лежащимъ въ основѣ сложенія, придана та форма, съ которою учитель ознакомился изъ только-что приведенныхъ отрывковъ „Ариѳметики для нач. школы". Кромѣ того, полезно уяснить себѣ, почему эти опредѣленія изложены въ вышеприведенномъ, а не въ иномъ порядкѣ. Для этого намъ необходимо обратить вниманіе на самое происхожденіе сложенія, какъ нѣкоего новаго дѣйствія, которое прежде всего отличается отъ непосредственнаго присчитыванія къ одному числу всѣхъ единицъ второго, къ полученному результату—всѣхъ единицъ третьяго, и т. д. Дѣйствительно: предположимъ, что намъ требуется узнать, сколько получится всѣхъ единицъ, если къ числу 5 381 присоединить всѣ единицы числа 3 485. Для разрѣшенія этого вопроса мы могли бы поступить, напр., слѣдующимъ образомъ: а) Взявъ 3 485 зеренъ, камешковъ или другихъ какихъ-либо предметовъ (для чего потребовалось бы взять такихъ предметовъ, конечно, не болѣе и не менѣе, а ровно 3 485 штукъ) и сложивъ эти предметы въ одну кучку, мы должны изъ этой кучки сначала взять одинъ предметъ, отложить его въ сторону, представить себѣ, что этотъ предметъ присчитанъ къ 5 381 предмету, которыхъ хотя и нѣтъ на-лицо, но которые тѣмъ не менѣе могутъ существовать въ нашемъ воображеніи, и произнести вслухъ: „пять тысячъ триста восемьдесятъ два", взять еще одинъ предметъ изъ нашей кучки, положить туда же, куда мы положили первый предметъ, и сказать: 5 383, взять еще одинъ предметъ, его равнымъ образомъ отложить въ сторону и сказать: 5 384, и поступать такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока всѣ предметы, взятые нами изъ первоначальной кучи, не будутъ исчерпаны, т. е. пока къ числу 5 381 не будутъ присчитаны всѣ единицы числа 3 485. Взятая нами куча предметовъ въ 3 485 штукъ сослужила бы намъ ту службу, что мы, присчитывая къ данному числу только одну единицу, къ полученному еще одну,

ко вновь полученному еще одну и т. д., могли бы быть вполнѣ увѣрены, что нами не взято при этомъ ни одной лишней единицы и что ни одна изъ подлежащихъ прибавленію единицъ нами не забыта. Кромѣ того, благодаря этой кучѣ предметовъ, намъ не приходилось бы безпокоиться о томъ, сколько единицъ второго числа нами уже присоединено и сколько намъ еще остается присоединить: въ продолженіе всего того промежутка времени, въ теченіе котораго мы занимались бы этимъ присчитываніемъ, предъ нами лежали бы двѣ кучи, въ одной изъ которыхъ находились бы уже сосчитанные, а въ другой—еще не присчитанные предметы. б) То же дѣйствіе присчитыванія мы могли бы совершить, записывая слѣдующіе два столбца чиселъ, изъ которыхъ второй столбецъ заключаетъ въ себѣ числа, получаемыя послѣ послѣдовательнаго присчитыванія одной единицы къ 5 381, къ полученному числу еще одной единицы, ко вновь полученному еще одной единицы и т. д. А первый столбецъ представляетъ собою рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое выражаетъ, сколько осталось еще присчитать къ числу, стоящему рядомъ съ нимъ направо, и изъ которыхъ послѣднее число представляетъ собою одну единицу:

3 485	. . . . .	5 381
3 484	. . . . .	5 382
3 483	. . . . .	5 383
3 482	. . . . .	5 384
3 481	. . . . .	5 385
3 480	. . . . .	
	. . . . .	
	. . . . .	

Неудобства при считываніи.

Изъ этихъ двухъ способовъ отысканія, по даннымъ двумъ числамъ, ихъ суммы, которая содержитъ въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ содержится въ обоихъ данныхъ числахъ вмѣстѣ, каждый требуетъ затраты весьма большого количества времени. Эта затрата гораздо больше, чѣмъ это можетъ показаться непосвященному съ перваго взгляда. Второй способъ имѣетъ передъ первымъ то преимущество, что не допускаетъ такого количества обмолвокъ, какое неизбѣжно при изустномъ подсчетѣ всѣхъ единицъ. Кромѣ того, у него также то преимущество, что мы во всякій моментъ можемъ прервать работу на нѣкоторое время съ тѣмъ, чтобы по прошествіи этого времени

снова возобновить ее. За-то второй способъ допускаетъ возможность описокъ. Но какъ тотъ, такъ и другой способъ, въ высшей степени утомительны, и примѣненіе ихъ къ случаямъ, когда даны значительныя слагаемыя, прямо невозможно. Если считать, что при второмъ способѣ отысканія суммы двухъ чиселъ (въ нашемъ примѣрѣ) для записи двухъ чиселъ требуется только полминуты, то для выполненія всей работы потребуется слишкомъ 28 часовъ.

Услуги памяти и таблицы сложенія.

Если бы человѣкъ не обладалъ способностью запомнить такъ называемую таблицу сложенія и не могъ пріобрѣсти навыка въ быстромъ прибавленіи любого однозначнаго числа къ любому другому, то онъ, конечно, былъ бы принужденъ отыскивать сумму двухъ чиселъ однимъ изъ вышеразсмотрѣнныхъ способовъ, или же съ помощью какой-либо вычислительной машины, вродѣ, напр., русскихъ торговыхъ счетовъ. Только благодаря памяти, человѣкъ можетъ запомнить, сколько будетъ 2 да 1, 3 да 1 и т. д., 2 да 2, 3 да 2, 4 да 2 и т. д., 2 да 3, 2 да 4, 2 да 5 и т. д., 3 да 2, 3 да 3, 3 да 4, 3 да 5 и т. д., т. е. можетъ запомнить, чему равна сумма любыхъ двухъ однозначныхъ чиселъ. Благодаря нѣкоторому, хотя и довольно значительному, количеству упражненій, онъ можетъ научиться также быстрому нахожденію суммы любыхъ двузначныхъ чиселъ съ однозначными, хотя бы при этомъ получился, сверхъ десятковъ перваго слагаемаго, еще одинъ десятокъ (27 да 8, 34 да 7, 48 да 5, 52 да 9 и т. д.). Поэтому онъ можетъ замѣнить сравнительно медленное и утомительное присчитываніе отдѣльныхъ единицъ второго слагаемаго къ первому тѣмъ, чрезвычайно быстро производимымъ, дѣйствіемъ, которое называется сложеніемъ двухъ чиселъ. Оно сводится къ тому, что: а) сначала быстро находятъ (не съ помощью присчитыванія, а благодаря памяти) суммы всѣхъ отдѣльныхъ единицъ перваго разряда данныхъ чиселъ, затѣмъ — всѣхъ отдѣльныхъ единицъ второго разряда этихъ чиселъ, далѣе — всѣхъ отдѣльныхъ единицъ третьяго разряда и т. д., и б) отъ этихъ отдѣльныхъ суммъ мы въ состояніи перейти къ окончательной суммѣ, въ которой каждое изъ слагаемыхъ содержитъ въ себѣ нѣкоторое, совершенно опредѣленное, непремѣнно меньшее десяти, число единицъ нѣкотораго опредѣленнаго разряда. Въ нашемъ примѣрѣ, послѣ того какъ будутъ присчитаны всѣ единицы второго числа, т. е. 3 485-ти, къ первому, т. е. къ 5 381-му, а также отъ истиннаго сложенія этихъ двухъ чиселъ, получится одно и то же новое число, которое равно 8 866-ти и отдѣльныя

слагаемыя котораго равны порознь слѣдующимъ числамъ: 8 тысячамъ, 8 сотнямъ, 6 десяткамъ и 6 единицамъ перваго разряда.

Обычное опредѣленіе сложенія.

Въ нѣкоторыхъ распространенныхъ учебникахъ ариѳметики говорится, что сложеніемъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется то дѣйствіе, посредствомъ котораго узнаютъ, сколько содержится всего единицъ во всѣхъ данныхъ числахъ. Это лишь постолько справедливо, посколько число всѣхъ единицъ, содержащихся въ данныхъ числахъ, дѣйствительно отыскивается съ помощью сложенія. Но это объясненіе или, вѣрнѣе, указаніе того смысла, въ которомъ употребляется слово „сложеніе“, не можетъ считаться *логически вѣрнымъ* опредѣленіемъ этого дѣйствія. Это—только вѣрное указаніе относительно того дѣйствія, которое обыкновенно называется сложеніемъ. Но въ указаніяхъ такого рода нѣтъ истиннаго опредѣленія того или другого понятія, такъ какъ опредѣленіе должно содержать въ себѣ не только указаніе, съ помощью котораго можно было бы какъ-нибудь отличить одинъ предметъ отъ другихъ. Въ опредѣленіи должны быть выражены всѣ видовыя отличія даннаго понятія отъ понятій того же рода. То дѣйствіе, которое мы называемъ сложеніемъ, представляетъ собою одно изъ *многихъ* дѣйствій, которыя имѣютъ цѣлью отысканіе суммы. Но отличительнымъ признакомъ для сложенія является то особенное средство, которое употребляется при сложеніи для достиженія этой цѣли. Этимъ средствомъ является не что иное, какъ таблица сложенія, ибо безъ нея сложеніе, какъ дѣйствіе, отличное отъ присчитыванія или отъ другого механическаго отысканія суммы, не существуетъ. Пользоваться же этимъ средствомъ, т. е. таблицею сложенія, можно при сложеніи только благодаря тому свойству суммы чиселъ, по которому величина суммы не зависитъ отъ того порядка, въ какомъ совершается соединеніе единицъ данныхъ чиселъ въ одно. Дѣйствительно: при сложеніи мы, вмѣсто данныхъ двухъ слагаемыхъ (8 367 и 3 459), изъ которыхъ каждое представляетъ въ свою очередь сумму нѣкоторымъ слагаемыхъ (8 367, напр., равно суммѣ 8-ми тысячъ, 3-хъ сотенъ, 6-ти десятковъ и 7-ми единицъ), беремъ другія слагаемыя: 16 единицъ, 11 десятковъ, 7 сотенъ и 11 тысячъ, и изъ нихъ составляемъ искомую сумму: 11 826.

Понятіе о суммѣ.

Особенно важно то педагогическое начало, по которому ученики должны сознательно относиться къ усвайваемому ими учебному матеріалу и должны, если къ тому представляется малѣйшая возможность, понимать цѣль своей работы и, такъ сказать, „присутствовать при изобрѣтеніи ариѳметики“ (см. § 12 гл. II) недостаточно, если они только послушно воспринимаютъ предлагаемый имъ въ учебномъ предметѣ готовый матеріалъ. Въ основѣ понятія о сложеніи лежитъ понятіе о суммѣ двухъ чиселъ: суммою двухъ чиселъ называется именно то число, которое *можно* получить, присчитавъ всѣ единицы второго числа къ первому. Хотя сумму можно найти также и

иначе, но для понятія о суммѣ это совершенно безразлично. Говоря иначе: для этого понятія совершенно безразлично, какой пріемъ мы употребимъ въ данномъ намъ случаѣ для отысканія суммы. Въ одномъ случаѣ мы можемъ присчитать единицы одного числа къ другому по пальцамъ, напр., для вычисленія—сколько будетъ 5 да 3. Въ другомъ мы можемъ составить сначала десятокъ, а потомъ уже къ полученному десятку присоединить оставшіяся единицы второго числа, напр., при отысканіи суммы 8 да 7. Въ третьемъ мы можемъ, благодаря тому, что помнимъ, сколько будетъ 8 да 8, разсчитать, что 8 да 7 меньше 16-ти на 1 единицу. Въ четвертомъ мы для отысканія суммы такихъ чиселъ, какъ 99 да 98 можемъ разсчитать, сколько будетъ 100 да 100, и изъ полученныхъ такимъ образомъ двухсотъ единицъ опять 1 десятокъ, а къ оставшемуся числу прибавить 7 единицъ, и т. д. Какъ бы мы ни добирались до суммы, понятіе о ней не мѣняется: она всегда остается только тѣмъ числомъ, которое можно получить, присчитавъ всѣ единицы одного числа къ другому. Понятіе о суммѣ тѣснѣйше связано именно съ присчитываніемъ, а не съ тѣмъ способомъ вычисленія, который мы употребили для ея отысканія. Понятіе же о суммѣ нѣсколькихъ чиселъ можетъ быть построено уже на понятіи о суммѣ двухъ изъ нихъ, т. е. на понятіи, ранѣе уже опредѣленномъ и вполнѣ извѣстномъ.

Дѣйствіе сложенія.

Когда понятіе о суммѣ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ такимъ образомъ установлено, необходимо приблизиться къ изобрѣтенію сложенія, какъ новаго дѣйствія, отличающагося отъ присчитыванія и замѣняющаго его собою. Первымъ шагомъ въ этомъ направленіи должно быть уразумѣніе того закона, по которому величина суммы данныхъ чиселъ не зависитъ отъ порядка этихъ чиселъ. Если бы эта величина измѣнялась съ измѣненіемъ порядка слагаемыхъ, то мы не имѣли бы никакого права складывать, хотя бы 27 съ 35-ю, такимъ образомъ, какъ мы это дѣлаемъ (т. е., сложивъ сначала 20 и 30, затѣмъ 7 и 5, и наконецъ сложивъ 50 и 12). Равнымъ образомъ мы не имѣли бы права дѣлать это сложеніе инымъ способомъ (напр., сложивъ 27 съ 30-ю, затѣмъ сложивъ полученное съ 5-ю) и вообще какимъ бы то ни было способомъ, отличающимся отъ послѣдовательнаго присчитыванія всѣхъ единицъ числа 35 къ 27-ми единицамъ перваго числа. Вотъ почему, тотчасъ же послѣ выработки понятія о суммѣ, должно усвоить тотъ основной законъ, которому подчиняется сумма двухъ

или нѣсколькихъ чиселъ. Законъ этотъ необходимъ, но одного этого закона еще не достаточно для возникновенія дѣйствія сложенія во всей его силѣ и удобопримѣнимости. Этотъ законъ даетъ намъ только возможность замѣнить одни слагаемыя другими, почему-либо для насъ болѣе удобными. Но если бы память наша не была въ состояніи навсегда сохранить тѣ равенства, которыя составляютъ содержаніе такъ называемой „таблицы сложенія“, и если бы мы, далѣе, не были въ состояніи пріобрѣсти навыкъ въ быстромъ сложеніи любого двузначнаго числа съ однозначнымъ, то дѣйствіе сложенія, по меньшей мѣрѣ, не могло бы совершаться такъ же быстро, вѣрно и твердо, какъ мы его производимъ въ настоящее время. Человѣкъ въ такомъ случаѣ, можетъ быть, изобрѣлъ бы какую-нибудь машину для вычисленія суммы (такія машины, къ тому же, изобрѣтены), но дѣйствія сложенія чиселъ въ теперешнемъ смыслѣ слова не существовало бы. Вотъ почему тотчасъ же послѣ того, какъ выясненъ тотъ законъ, по которому величина суммы не зависитъ отъ порядка соединенія слагаемыхъ, должно выдвинуть на первый планъ то, что прежде всего необходимо помнить наизусть и въ чемъ надобно, для сложенія, пріобрѣсти достаточный навыкъ. Для сложенія необходимо знать такъ наз. таблицу сложенія, т. е. знать на-память, какъ велика сумма любыхъ двухъ однозначныхъ чиселъ, и не затрудняться въ быстромъ нахожденіи суммы любого числа съ однозначнымъ. Что таблицу сложенія надо знать раньше, чѣмъ дано опредѣленіе самаго дѣйствія сложенія, въ томъ нѣтъ ничего предосудительнаго. Для того, чтобы знать данныя такъ наз. таблицы сложенія, вовсе нѣтъ никакой надобности знать точное опредѣленіе „сложенія двухъ или нѣсколькихъ чиселъ“. Человѣкъ, знающій, сколько будетъ 2 да 1, 2 да 2, 2 да 3 и т. д. вплоть до суммъ 10 да 9, 10 да 10, уже знаетъ таблицу сложенія, и для этого нѣтъ надобности знать, что называется сложеніемъ. Таблицею сложенія называется только совокупность цѣлаго ряда извѣстныхъ равенствъ, а знаніе на-память т. н. таблицы сложенія является неизбѣжно-необходимымъ условіемъ для производства сложенія всякихъ чиселъ. Но все это могутъ постигнуть, конечно, только ученики, уже пріобрѣтшіе навыкъ въ сложеніи.

Опредѣленіе сложенія.

Когда средство для болѣе быстраго, чѣмъ присчитываніе единицъ, нахожденія суммы чиселъ учениками оцѣнено, можно составить и самое опредѣленіе сложенія. Наиболѣе простою и наиболѣе соотвѣтствующею сущности дѣла

формою опредѣленія сложенія надо считать слѣдующую: „сложить какія бы то ни было цѣлыя числа значитъ отыскать сумму этихъ чиселъ, съ помощью таблицею сложенія“.

Сложеніе многочисленныхъ слагаемыхъ.

Остальныя опредѣленія въ статьѣ о сложеніи, а равно изложеніе правилъ сложенія въ разныхъ учебникахъ ариѳметики уже не столь существенны, если не считать случая, когда одно слагаемое—нуль и когда первоначальный смыслъ суммы и сложенія непримѣнимы. Важенъ также особенный способъ сложенія чиселъ въ случаѣ, когда ихъ болѣе десяти, отличающійся отъ обычно практикуемаго и излагаемаго въ учебникахъ способа сложенія многочисленныхъ слагаемыхъ. Этотъ способъ состоитъ въ томъ, что сначала складываютъ только всѣ отдѣльныя единицы перваго разряда, полученное записываютъ сполна въ сторонѣ; затѣмъ складываютъ всѣ отдѣльные десятки и полученную сумму тоже надлежащимъ образомъ записываютъ подъ первою суммою; потомъ складываютъ всѣ отдѣльныя сотни и полученное число также надлежащимъ образомъ подписываютъ, и т. д. до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны такимъ образомъ всѣ разряды данныхъ слагаемыхъ. Тогда остается только сложить записанныя послѣ всего этого частныя суммы. На ниже приведенномъ примѣрѣ сложеніе начато съ единицъ высшаго разряда (что, конечно, все равно):

4 979	75 000... сумма всѣхъ отдѣльныхъ тысячъ;
2 749	8 400... „ „ „ сотенъ;
4 897	880... „ „ „ десятковъ;
6 989	88... „ „ „ единицъ;
7 698	84 368... окончательная сумма.
9 634	
8 964	
6 789	
4 497	
9 489	
7 896	
9 787	

Кто нѣсколько разъ попробуетъ сдѣлать сложеніе подобнымъ образомъ, тотъ при многочисленныхъ слагаемыхъ предпочтетъ этотъ способъ остальнымъ. Этотъ способъ производства сложенія многочисленныхъ слагаемыхъ представляетъ слѣдующія удобства: а) когда произведено сложеніе всѣхъ единицъ одного разряда, можно прервать работу, не боясь, что ее придется начинать всю сначала; б) если у лица, вычисляющаго искомую сумму, закралось сомнѣніе въ томъ, вѣрно ли онъ вычислилъ сумму единицъ одного какого-либо разряда, онъ можетъ, не начиная всей работы сначала, провѣрить только вѣрность сомнительнаго результата; в) можно, не производя всѣхъ сложеній, приблизительно „взвѣсить“ величину суммы: наша сумма, напр., болѣе 75-ти тысячъ, но меньше 87-ми тысячъ (послѣдній результатъ получился отъ того, что въ каждомъ слагаемомъ вмѣсто единицъ трехъ послѣднихъ разрядовъ взяты тысячи, счетомъ 12).—Всѣ тѣ лица, которымъ приходится дѣлать большія вычисленія надъ многочисленными слагаемыми, должны предпочитать этотъ способъ производства вычисленія даже вычисленію на счетахъ. Всякая ошибка въ сложеніи легче разыскивается при этомъ способѣ вычисленія, чѣмъ при вычисленіи на счетахъ или при томъ способѣ сложенія, которое сводится къ нахожденію сначала суммы нѣсколькихъ слагаемыхъ, затѣмъ—суммы другихъ изъ числа остальныхъ слагаемыхъ и т. д., и наконецъ—къ нахожденію общей суммы.

Повѣрка сложенія.

Что касается такъ называемой повѣрки сложенія, то нельзя не признать, что, какъ и всякая провѣрка, также и повѣрка сложенія требуетъ, чтобы было еще разъ произведено то же или иное дѣйствіе, а при производствѣ второго дѣйствія опять можетъ вкрасться та же или иная ошибка. Поэтому не слѣдуетъ думать, что если при провѣркѣ дѣйствія полученъ удовлетворительный результатъ, то дѣйствіе произведено вѣрно. Можно утверждать только одно, а именно, что для повѣрки сложенія (§ 24 „Ариѳметики для начальныхъ школъ“, Спб., 1903) можно произвести это дѣйствіе еще разъ въ томъ же или иномъ порядкѣ и что если оба раза сложеніе произведено в ѣ р н о, то полученныя суммы будутъ одинаковы. Но нельзя утверждать, что если въ обоихъ случаяхъ получилась о д н а и т а ж е с у м м а, то сложеніе произведено вѣрно. Можно только допустить нѣкоторую вѣроятность того, что сложеніе, дѣйствительно, совершено вѣрно, если оба раза получился одинаковый результатъ. Но насколько велика эта вѣроятность—сказать нельзя. Иногда производящій вычисленіе и сдѣлавшій какую-либо ошибку, ту же ошибку повторяетъ и при вторичномъ производствѣ того же дѣйствія,—въ особенности, если это дѣйствіе произведено въ томъ же порядкѣ. Иногда же ошибка можетъ быть сдѣлана при повѣркѣ. Поэтому, если дѣйствіе произведено въ другомъ порядкѣ и получился результатъ, несогласный съ прежнимъ, то ошибка могла быть сдѣлана именно во второй разъ, а не въ первый. Такимъ образомъ полагаться на повѣрку дѣйствія не слѣдуетъ, и это должно быть учениками ясно сознано. Весьма полезно, кромѣ того, внушить имъ сознаніе, что дѣйствіе слѣдуетъ по возможности произво-

дить прежде всего такъ, чтобы оно въ повѣркѣ не нуждалось, т. е. со всей рачительностью и вниманіемъ, со всею тою сознательностью и аккуратностью въ работѣ, которыя являются прямо необходимыми и существенными условіями правильнаго вычисленія. Вообще, какъ обычныя правила повѣрки, такъ и самое ученіе о провѣркѣ четырехъ дѣйствій, крайне устарѣли. Поэтому нынѣ къ нимъ и не слѣдовало бы прибѣгать. А если прибѣгать къ провѣркѣ, то съ помощью признаковъ дѣлимости чиселъ на 9 и на 11. Но эти способы провѣрки выходятъ за предѣлы курса начальной школы.

Вычитаніе и его происхожденіе.

§ 8. На той же, 26-ой, ступени содержатся упражненія, съ помощью которыхъ у учениковъ образовываются болѣе точныя понятія о вычитаніи. Есть взглядъ на вычитаніе, по которому вычесть одно число изъ другого значитъ о т н я т ь второе отъ перваго и по которому, стало-быть, это дѣйствіе является дѣйствіемъ какъ бы самостоятельнымъ. Онъ постолько удобенъ для практики, посколько согласенъ съ изустнымъ производствомъ вычитанія и со способомъ письменнаго производства этого дѣйствія надъ многозначными числами. Взглядъ этотъ даетъ также возможность отличить дѣйствіе вычитанія отъ любого изъ остальныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Но это согласіе не идетъ далѣе самаго общаго указанія на цѣль дѣйствія, — указанія, въ высшей степени недостаточнаго.—Если мы, на подобіе того, какъ поступили въ предыдущемъ параграфѣ, пожелаемъ изслѣдовать самое происхожденіе этого дѣйствія, то мы придемъ къ слѣдующимъ выводамъ. Пусть требуется отнять, т. е. отдѣлить, отъ 5 437-ми единицъ, 2 789 единицъ, а потомъ у з н а т ь, с к о л ь к о о с т а л о с ь е д и н и ц ъ п о с л ѣ э т о г о (это послѣднее требованіе, конечно, крайне важно). Мы можемъ въ такомъ случаѣ поступить, напр., слѣдующимъ образомъ: а) Взявши 5 437 какихъ-нибудь предметовъ (зеренъ, камешковъ, палочекъ),—для этого придется долго-долго и аккуратно считать, пока не насчитаемъ этого числа предметовъ,—и, отложивъ потомъ одинъ изъ этихъ предметовъ въ сторону, произнести слово „одинъ“; взявъ еще предметъ, сказать слово „два“, взявъ еще предметъ, сказать слово „три“, и т. д., пока не доберемся до отдѣленнаго предмета, при отдѣленіи котораго мы произнесемъ слова „двѣ тысячи семьсотъ восемьдесятъ девять“. Тогда у насъ получатся двѣ кучки, изъ коихъ въ одной, въ отдѣленной 2 789 предметовъ, а въ другой—остальное. Когда это сдѣлано, мы должны будемъ еще сосчитать, сколько предметовъ въ этой послѣдней кучкѣ, и лишь тогда задача наша

будетъ рѣшена. б) Мы можемъ того же результата добиться и письменно, записывая въ первый столбецъ то, что дано и что остается послѣ вычитанія единицы, а въ другой то, что уже вычтено, напр., такъ:

5 437	—
5 436	1
5 435	2
5 434	3
5 433	4
5 432	5

Въ концѣ-концовъ наступитъ моментъ, когда во второмъ столбцѣ появится число 2 789, а въ первомъ—рядомъ съ нимъ, число 2 648, каковое послѣднее число и есть число оставшихся единицъ. Не надо думать, что для выполненія этой работы надобно знать обычный письменный способъ производства дѣйствія. Даже въ самымъ неудобныхъ случаяхъ, напр., въ случаѣ, когда въ остаткѣ получится 5 000 единицъ, для вычитанія еще одной единицы требуется не письменное производство дѣйствія, а умѣніе раздроблять единицу высшаго разряда въ единицы разряда низшаго и основательное знаніе нумераціи и счета. Ибо, если кто не знаетъ, какое число предшествуетъ (въ рядѣ натуральныхъ чиселъ) пяти тысячамъ, тотъ не знаетъ счета и закона составленія этихъ чиселъ.—Можно, конечно, найти разность данныхъ чиселъ и съ помощью какого-либо вычислительнаго прибора, напр., съ помощью русскихъ торговыхъ счетовъ. Но вычисленія съ помощью приборовъ въ счетъ не идутъ: они къ ученіямъ а р и ѳ м е т и к и, какъ къ ученіямъ объ и з у с т н о м ъ и п и с ь м е н н о м ъ вычисленіи суммъ, разностей, произведеній и частныхъ, имѣютъ лишь косвенное отношеніе.

Опредѣленіе вычитанія.

Какъ бы то ни было, вполнѣ очевидно изъ всего выше изложеннаго, что не отсчитываніе единицъ, не собственно отниманіе отъ даннаго числа нѣкотораго числа его единицъ, имѣютъ въ виду, когда говорятъ о в ы ч и т а н і и, какъ о нѣкоторомъ ариѳметическомъ дѣйствіи, во всякомъ случаѣ,—не отниманіе по единицѣ, въ истинномъ значеніи этого слова. Въ виду всѣхъ этихъ соображеній, то опредѣленіе вычитанія, по которому вычесть число значитъ его отнять, по меньшей мѣрѣ, не характеризуетъ понятія объ этомъ дѣйствіи.—Дѣйствіе это придумано, вѣдь, именно для того, чтобы вопросы о числѣ, о с т а ю щ е м с я послѣ отдѣленія нѣкотораго числа единицъ отъ даннаго числа ихъ, рѣшать не съ помощью отниманія, отдѣленія единицъ, а съ помощью особенной таблицы равенствъ, которую называютъ „таблицею вычитанія“. Прежде всего необходимы упражненія на вычитаніе, которыя надобно проработать съ учениками съ той точки зрѣнія, по которой такъ называемое уменьшаемое число предста-

вляетъ собою только сумму двухъ чиселъ, изъ коихъ одно, называемое вычитаемымъ, извѣстно, а другое неизвѣстно. Отысканіе же этого неизвѣстнаго числа представляетъ собою истинную цѣль вычитанія, но средствомъ для достиженія этой цѣли должна служить только таблица вычитанія. Вотъ почему въ „Ариѳметикѣ для нач. школъ“, содержащей ученіе о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, § 25 содержитъ въ себѣ соображенія о томъ, что если даны два не одинаковыхъ числа, то существуетъ такое третье, которое надо прибавить къ меньшему, чтобы получить большее. Вотъ почему въ этой „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“ къ опредѣленію вычитанія, какъ новаго дѣйствія, ведетъ слѣдующій рядъ подготовительныхъ соображеній и опредѣленій:

Пусть у насъ есть какое-нибудь число (напр., 57) какихъ-нибудь предметовъ, пусть требуется отдѣлить нѣкоторое число ихъ, напр., 25 штукъ, и сосчитать, сколько предметовъ входятъ, сверхъ этихъ 25-ти, въ составъ данныхъ намъ 57-ми предметовъ. Сдѣлавши это, узнаемъ, что у насъ, сверхъ 25-ти предметовъ, есть еще 32, которые вмѣстѣ съ этими 25-ью составляютъ данные намъ 57 предметовъ, или что въ 57-ми единицахъ, сверхъ 25-ти единицъ, содержатся еще 32 единицы.—Всякое число, отличающееся отъ одной единицы, можно разсматривать, какъ сумму нѣкотораго извѣстнаго числа его единицъ съ нѣкоторымъ другимъ (а иногда—съ такимъ же) числомъ его же единицъ.

Для того чтобы, по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ, быстро вычислить другое, не данное намъ, слагаемое, необходимо знать такъ-называемую таблицу вычитанія, т. е. знать на-память, какъ велико однозначное слагаемое, ежели извѣстна его сумма съ извѣстнымъ намъ однозначнымъ слагаемымъ.

Вычесть изъ даннаго числа нѣкоторое число его же единицъ значитъ, съ помощью таблицы вычитанія, найти третье число, отъ сложенія котораго со вторымъ получится первое. Первое изъ данныхъ намъ чиселъ называется уменьшаемымъ, данное намъ слагаемое называется вычитаемымъ, а не данное намъ (искомое) слагаемое—остаткомъ отъ вычитанія, или просто остаткомъ. Въ этомъ случаѣ уменьшаемое число больше вычитаемаго и больше остатка.

Если ученики не знаютъ, что такое разность двухъ чиселъ, то они не могутъ имѣть истиннаго понятія о цѣли дѣйствія вычитанія. Если они только и знаютъ, что именно представляетъ собою разность двухъ чиселъ, но еще не знаютъ таблицы вычитанія, то

они знаютъ только то, отысканіе чего составляетъ цѣль дѣйствія, но еще не знаютъ средства къ достиженію этой цѣли. Болѣе того: если они знаютъ, что такое разность, и даже знаютъ таблицу вычитанія, то они, будучи уже въ состояніи производить это дѣйствіе, все-таки еще точнаго понятія о дѣйствіи не имѣютъ. Это точное понятіе сводится къ тому, что (§ 27 „Ариѳметики для начальныхъ школъ“) вычесть одно число изъ другого значитъ отыскать, ихъ разность, пользуясь только таблицею вычитанія. Остальныя опредѣленія (уменьшаемаго, вычитаемаго и остатка) въ „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“, а также правила вычитанія, ничѣмъ существеннымъ отъ обычно излагаемыхъ въ учебникахъ ариѳметики не отличаются.

Приложенія вычитанія.

Нѣкотораго вниманія заслуживаютъ, впрочемъ, соображенія относительно приложеній вычитанія къ случаямъ двоякаго рода (§ 35 „Ариѳметики для начальныхъ школъ“). Извѣстно, что есть такія задачи, по самому смыслу которыхъ требуется разсчитать, сколько останется, если отъ даннаго числа единицъ, на самомъ дѣлѣ, надобно отдѣлить нѣкоторое число ихъ. И въ этомъ случаѣ въ результатѣ получается остатокъ—въ полномъ смыслѣ этого послѣдняго слова. Но бываютъ и такіе случаи, когда дано не одно только число, отъ котораго надо отдѣлить нѣкоторое число его единицъ, а два различныхъ числа (у одного мальчика было 17 орѣховъ, а у другого 9 орѣховъ) и требуется найти, на сколько въ одномъ изъ этихъ двухъ чиселъ больше единицъ, чѣмъ въ другомъ. Это вовсе не значитъ, что единицы второго числа (въ нашемъ примѣрѣ—орѣхи 2-го мальчика) надо отнять, отдѣлить отъ перваго числа (отъ орѣховъ перваго мальчика). Въ этомъ случаѣ надо разсчитать слѣдующее: въ одномъ числѣ столько же единицъ, сколько ихъ во второмъ, но въ одномъ еще, сверхъ того, нѣкоторое число единицъ (у перваго мальчика тоже 9 орѣховъ и еще нѣкоторое количество ихъ); требуется же при этомъ узнать сколько именно, сверхъ извѣстнаго числа единицъ, равнаго нѣкоторому данному, содержится еще единицъ въ другомъ изъ данныхъ чиселъ. Этимъ различнымъ случаямъ должны быть посвящены задачи (№ 240), и о немъ идетъ рѣчь въ концѣ § 35, гласящемъ такъ: „Пусть даны не одно число и нѣкоторая часть его, а два различныхъ числа, напр., 18 единицъ и 7 такихъ же единицъ, изъ которыхъ ни одна не входитъ въ составъ первыхъ 18-ти единицъ. Тогда изъ большаго числа можно вычесть столько его единицъ, сколько

ихъ содержится во второмъ числѣ, т. е. изъ большаго числа можно вычесть 7 его же единицъ. Мы такимъ образомъ узнаемъ, какое третье число надо прибавить къ меньшему изъ данныхъ двухъ чиселъ, т. е. къ 7-ми, чтобы получить число, равное большему. Говорятъ также, что такимъ образомъ узнаютъ, на сколько единицъ большее число больше меньшаго, или (что—то же) на сколько единицъ меньшее число меньше большаго. То число единицъ, на которое одно число больше или меньше другого числа, называется разностью между данными двумя числами.—Разность между данными двумя числами находятъ съ помощью вычитанія: для этого изъ большаго числа вычитаютъ столько его единицъ, сколько единицъ въ меньшемъ изъ данныхъ двухъ чиселъ. Разность между данными двумя числами равна тогда остатку отъ этого вычитанія. Поэтому остатокъ отъ вычитанія меньшаго числа изъ большаго часто называется также разностью между данными двумя числами.—Если два числа равны между собою, то говорятъ, что разность между ними равна нулю".

Умноженіе. § 9. Что касается ряда опредѣленій и законовъ, относящихся до дѣйствія умноженія, то здѣсь наблюдается то же самое несоотвѣтствіе между обычно практикуемыми опредѣленіями умноженія и истинною сущностью этого дѣйствія. Дѣло въ томъ, что умноженіе не есть сложеніе, а только замѣняетъ собою это послѣднее дѣйствіе, притомъ лишь въ томъ особенномъ случаѣ, когда слагаемыя равны между собою, и особенно полезно тогда, когда слагаемыхъ болѣе или менѣе значительное количество. Вотъ почему въ составленной мною „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ" (Спб. 1903) содержаніе и порядокъ относящихся сюда опредѣленій слѣдующіе (§§ 37—39):

Что значитъ взять число слагаемымъ? Пусть даны четыре одинаковыхъ числа: 35, 35, 35 и 35, и пусть требуется ихъ сложить; въ этомъ случаѣ говорятъ, что 35 требуется взять слагаемымъ четыре раза.—Всякое число можно взять слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ числѣ, если послѣднее больше единицы. — Такъ, 27 взять слагаемымъ 5 разъ значитъ — сложить пять чиселъ, изъ которыхъ каждое содержитъ 27 единицъ.

Произведеніе одного числа на другое. Третье число, которое получится, если возьмемъ первое число слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ числѣ, называется произведеніемъ перваго числа на второе.—Такъ, 20 — произведеніе 5-ти на 4, а 49—произведеніе 7-ми на 7.—Второе число должно быть

больше единицы, потому что слагаемыхъ должно быть, по крайней мѣрѣ, два.

Главное свойство произведенія одного числа на другое. Если даны два числа, то произведеніе перваго на второе равно произведенію второго на первое.— Такъ, если даны два числа: 7 и 3, то, возьмемъ ли мы 7 слагаемымъ 3 раза, или же 3 —слагаемымъ 7 разъ, мы въ обоихъ случаяхъ получимъ одно и то же произведеніе, а именно 21.—Поэтому произведеніе одного числа на другое называютъ также произведеніемъ данныхъ двухъ чиселъ. — Всякое цѣлое число, отличающееся отъ единицы, можно разсматривать, какъ произведеніе одной единицы на это же число; такъ, 7 есть произведеніе одной единицы на 7.—Существуютъ числа, которыя можно разсматривать какъ произведенія двухъ одинаковыхъ или двухъ различныхъ чиселъ; такъ, 49—произведеніе 7-ми на 7, а 50—произведеніе 10 на 5.

Разложеніе одного изъ чиселъ на слагаемыя. Если даны два числа и требуется найти ихъ произведеніе, то его можно найти также и слѣдующимъ образомъ: разложимъ первое число на нѣсколько частей (слагаемыхъ), возьмемъ каждую изъ нихъ слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ изъ данныхъ намъ чиселъ, и сложимъ всѣ эти произведенія. Такъ, если надо найти произведеніе 17-ти на 8, то можно взять число 10 (одну часть 17-ти) слагаемымъ 8 разъ, затѣмъ—число 7 (остальную часть 17-ти) слагаемымъ 8 разъ, и полученныя произведенія сложить.—То же произведеніе можно получить и иначе: возьмемъ 17 не 8 разъ слагаемымъ, а только 5 разъ, потомъ возьмемъ то же самое число (т. е. 17) еще 3 раза слагаемымъ, и полученныя произведенія сложимъ.— Важно при этомъ только слѣдующее: 1) чтобы, при отысканіи произведенія, всѣ единицы, подлежащія сложенію, были сложены, и 2) чтобы къ этому произведенію не было прибавлено ни одной лишней единицы.

Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ. Пусть даны пять чиселъ: 7, 5, 4, 3 и 10; найдемъ произведеніе 7-ми на 5, получимъ 35; возьмемъ это произведеніе слагаемымъ 4 раза, получимъ 140; найдемъ произведеніе этого числа на 3, получимъ 420; найдемъ, наконецъ, произведеніе 420-ти на послѣднее изъ данныхъ чиселъ, т. е. на 10, и мы получимъ новое число, а именно 4 200.— Всякое цѣлое число можно взять слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ; полученное произведеніе можно взять слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ третьемъ числѣ, и

такимъ образомъ можно поступать до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны всѣ данныя числа. То число, которое при этомъ получится въ концѣ-концовъ, называется произведеніемъ всѣхъ данныхъ чиселъ.—Такъ, 40—произведеніе чиселъ: 5, 2 и 4.

Свойства произведенія нѣск. чиселъ. Если дано нѣсколько чиселъ, то, въ какомъ бы порядкѣ ихъ ни взяли, произведеніе всѣхъ чиселъ получится одно и то же; такъ, произведеніе чиселъ: 7, 5, 4 и 3—то же, что произведеніе чиселъ: 3, 5, 7 и 4.—Этого мало: если даны числа: 7, 4, 5, 2 и 8, то ихъ произведеніе можно найти разными способами, напр., такъ: сначала найдемъ произведеніе третьяго числа на четвертое (т. е. 5-ти на 2), получимъ 10, затѣмъ—произведеніе второго на пятое, получимъ 32,—такъ что, вмѣсто чиселъ: 5, 2, 4 и 8, мы возьмемъ два произведенія: 10 и 32; теперь будемъ искать уже произведеніе чиселъ: 7, 10 и 32; для этого, вмѣсто чиселъ: 10 и 32, возьмемъ ихъ произведеніе 320, и тогда намъ придется уже искать произведеніе чиселъ 320 и 7.—Важно при этомъ только слѣдующее: 1) чтобы, при отысканіи произведенія, каждое изъ данныхъ чиселъ принималось въ расчетъ, 2) чтобы каждое изъ чиселъ принималось въ расчетъ только одинъ разъ, и 3) чтобы ни одно лишнее число, сверхъ тѣхъ, которыя даны, не было принято въ расчетъ при составленіи какого-либо промежуточнаго или при составленіи окончательнаго произведенія.

Таблица умноженія. Для того чтобы быстро вычислить произведеніе какихъ угодно чиселъ, необходимо знать такъ наз. таблицу умноженія, т. е. знать на-память произведенія любыхъ двухъ, одинаковыхъ или разныхъ, чиселъ перваго десятка. При этомъ считаютъ, что произведеніе любого числа на единицу равно первому числу, т. е.: однажды-одинъ—одинъ, однажды-два—два, и т. д.

Что значитъ умножить одно число на другое? Умножить одно число на другое, или перемножить два данныхъ числа, значитъ — найти ихъ произведеніе съ помощью таблицы умноженія. Когда требуется перемножить два числа, то говорятъ иногда, что „первое требуется взять столько разъ, сколько единицъ во второмъ“.—Такъ, если требуется 12 помножить на 5, то говорятъ, что 12 надо взять 5 разъ (при этомъ пропущено слово „слагаемымъ“).—Первое число (слагаемое) называется множимымъ, а второе (число слагаемыхъ)—множителемъ.

Что значитъ перемножить? Перемножить нѣсколько чиселъ значитъ найти ихъ произведеніе, пользуясь, при этомъ, таблицею умноженія.

Сомножители. Величина произведенія нѣсколькихъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны въ ихъ порядкѣ, или въ порядкѣ ихъ перемноженія. Поэтому всѣ числа, которыя требуется перемножить, а также числа, которыхъ произведеніе уже найдено, называются сомножителями этого произведенія.

Происхожденіе умноженія. Если бы мы пожелали,—на подобіе того, какъ мы это сдѣлали относительно дѣйствій сложенія и вычитанія,—уяснить себѣ происхожденіе умноженія, то для этого мы могли бы взять хотя бы слѣдующій примѣръ. Пусть десятина лѣса стоитъ 884 рубля; нѣкто покупаетъ 537 десятинъ такого лѣса. Чтобы узнать, сколько денегъ требуется на покупку этого лѣса, намъ слѣдовало бы, если бы мы вздумали пользоваться только сложеніемъ, записать въ одинъ столбецъ 537 слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно 884. Если на запись каждаго слагаемаго требуется только $^1/_4$ мин., то на одно только записываніе всѣхъ слагаемыхъ пошло бы болѣе двухъ часовъ, а самое сложеніе заняло бы $^3/_4$ часа, если считать, что оно производится по слѣдующему образцу: 4, 8, 12, 16, 20, 24 и т. д., а что на произнесеніе каждой суммы требуется только двѣ секунды (промежутокъ времени, конечно, достаточный только для произнесенія одного или двухъ словъ, но для произнесенія нѣкоторыхъ изъ результатовъ такого сложенія, когда они болѣе ста, далеко не достаточный). Итого, стало-быть, на производство этого сложенія потребовалось бы около трехъ часовъ, при самомъ умѣренномъ и прямо невыполнимомъ на практикѣ расчетѣ. Дѣйствіе умноженія и имѣетъ цѣлью избавить насъ, при вычисленіи суммъ равныхъ между собою слагаемыхъ, отъ непосредственнаго сложенія этихъ слагаемыхъ. Ибо такое сложеніе, въ случаѣ многозначнаго множимаго и многозначнаго множителя, можетъ оказаться практически прямо невыполнимымъ по той причинѣ, что оно потребовало бы неимовѣрнаго количества труда и времени. Вотъ почему въ основу всѣхъ опредѣленій положено установленіе смысла словъ „взять слагаемымъ нѣкоторое число разъ“. Далѣе опредѣлено произведеніе, какъ та сумма, которую можно получить, взявъ первое изъ данныхъ чиселъ слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ единицъ. Это опредѣленіе произведенія вовсе не предрѣшаетъ вопроса о томъ, какъ именно надобно находить эту сумму и какимъ еще дѣйствіемъ,

кромѣ сложенія, произведеніе двухъ чиселъ можетъ быть найдено. Равнымъ образомъ это понятіе о произведеніи еще не содержитъ въ себѣ и понятія объ умноженіи, а потому отъ этого понятія совершенно не зависитъ. Но для того, чтобы умноженіе было возможно, т. е. для того, чтобы мы могли находить сумму равныхъ между собою слагаемыхъ не съ помощью одного лишь сложенія, надо обладать какимъ-нибудь особеннымъ средствомъ для отысканія произведеній значительнаго числа болѣе или менѣе значительныхъ слагаемыхъ. Отысканіе произведенія—цѣль умноженія. Средствомъ же для достиженія этой цѣли безъ помощи непосредственнаго сложенія данныхъ, равныхъ между собою, слагаемыхъ является „таблица умноженія“. Такъ называется таблица равенствъ, первыя части которыхъ содержатъ въ себѣ требованія, выражаемыя словами: дважды одинъ, дважды два, дважды три, дважды четыре, дважды пять и т. д., а вторыя части—результаты, получаемые по выполненіи этихъ требованій.

Услуги памяти и таблица умноженія.

Если бы память человѣка была такъ слаба, что не была бы въ состояніи, послѣ нѣкотораго упражненія, сохранить навсегда въ своей власти таблицу умноженія чиселъ перваго десятка, и еслибъ она, память, кромѣ того, не была въ состояніи снабдить человѣка навыкомъ (достаточнымъ для того) въ прибавленіи однозначнаго числа къ двузначному, то умноженіе, какъ нѣкоторое самостоятельное дѣйствіе, отличающееся отъ сложенія, никогда человѣкомъ не было бы изобрѣтено. Вопросъ о с у м м ѣ нѣкотораго числа одинаковыхъ слагаемыхъ потребовалъ бы для своего разрѣшенія непремѣнно либо примѣненія непосредственнаго сложенія, либо же употребленія нѣкоторой особенной ариѳметической машины (такія машины, впрочемъ, есть). Дѣйствіе отысканія произведенія тогда совершалось бы, вслѣдствіе этого, совсѣмъ не такъ, какъ мы его совершаемъ нынѣ.

Вотъ почему послѣ опредѣленія произведенія двухъ чиселъ и свойствъ его должны итти указаніе на необходимость знанія такъ называемой таблицы умноженія, а затѣмъ уже опредѣленіе самаго умноженія, далѣе—условія относительно записи множимаго, множителя, произведенія и т. д. Нѣкотораго вниманія заслуживаетъ опредѣленіе произведенія нѣсколькихъ чиселъ и тотъ законъ, по которому величина произведенія не зависитъ отъ порядка сомножителей, а также „умноженіе“ на одну единицу.

Услуги арабскихъ цифръ и десятичной системы.

Должно, кромѣ того, добавить, что письменное производство умноженія въ случаѣ, если числа обозначены не съ помощью арабскихъ цифръ по десятичной системѣ, а съ помощью цифръ другого рода, напр., римскихъ или церковно-славянскихъ, гораздо затруднительнѣе, чѣмъ производство того же дѣйствія надъ числами, обозначенными съ помощью арабскихъ цифръ. Причина этого не только въ томъ, что мы къ арабскимъ цифрамъ привыкли, а также въ томъ, что полученіе произведенія многозначнаго числа на однозначное и произведенія многозначнаго числа, обозначеннаго арабскими цифрами, на 10, 100 и т. д., значительно легче, чѣмъ въ случаѣ, ежели числа обозначены римскими или другими, не арабскими, цифрами. Это послѣднее обстоятельство, поэтому, можетъ и должно внушать намъ особенное удивленіе предъ размѣрами того великаго благодѣянія, которое человѣку оказали арабскія цифры съ нулемъ въ ихъ числѣ и десятичная система счисленія,—изобрѣтеніе, предъ которымъ преклонялся, какъ извѣстно, такой великій математикъ, какъ Лапласъ (сравни § 2 гл. V).

Множитель нуль или единица.

Есть два случая, когда дѣйствіе умноженія теряетъ свой первоначальный смыслъ (дѣйствія, съ помощью котораго находятъ сумму нѣсколькихъ одинаковыхъ слагаемыхъ) и когда, вслѣдствіе этого, смыслъ слова „произведеніе“ долженъ быть установленъ еще разъ. Это—случаи, когда множитель равенъ одной единицѣ и когда онъ равенъ нулю. Дѣло въ томъ, что если у насъ написано 7×3, 7×5, 7×2, то каждая изъ этихъ записей выражаетъ, что число 7 надо взять слагаемымъ нѣкоторое число разъ. Когда же мы напишемъ 7×1, то эта запись не можетъ обозначать, что 7 надо взять с л а г а е м ы м ъ 1 разъ, потому что с л а г а е м ы х ъ должно быть нѣсколько или, по крайней мѣрѣ, два. Точно такъ же запись 7×0 не можетъ имѣть того значенія, которое придается множителю, когда онъ не меньше 2-хъ. Говорить, что въ этомъ случаѣ 7 взято слагаемымъ нуль разъ и что, стало-быть, въ такомъ случаѣ семи не надо брать слагаемымъ, значитъ ничего не сказать. Ибо самое представленіе о слагаемомъ связано съ представленіемъ о нѣсколькихъ или, по крайней мѣрѣ, о двухъ числахъ, которыя надо сложить. Вотъ почему въ „Ариѳметикѣ для нач. школъ“ (§§ 48 и 49) сдѣлано условіе, что если множитель 1, то въ такомъ случаѣ с ч и т а ю т ъ, что произведеніе равно множимому, а если множитель 0, то въ такомъ случаѣ произведеніе с ч и т а ю т ъ равнымъ нулю. Эти два случая отнюдь не вытекаютъ изъ первоначальнаго представленія о произведеніи, и о нихъ не надо было бы говорить, если бы вопросъ этотъ не представлялъ нѣкоторой

важности въ курсѣ 4-го года. Первое условіе прямо необходимо потому, что при производствѣ умноженія цифра единицъ множителя можетъ быть равна единицѣ, а второе — потому, что смыслъ умноженія на нуль, хотя такое умноженіе въ ариѳметикѣ и не встрѣчается, даетъ возможность писать знакъ умноженія между любыми двумя цифрами, не задумываясь надъ тѣмъ, можно ли этотъ знакъ ставить между данными цифрами или нѣтъ. Это условіе, такъ сказать, обобщаетъ, расширяетъ смыслъ дѣйствія умноженія и его примѣненія.

Запись письменнаго производства умноженія.

Остальныя опредѣленія, а равно правила, не существенно отличаются отъ излагаемыхъ въ другихъ учебникахъ. Нѣкотораго вниманія заслуживаетъ только вопросъ о записи вычисленій при умноженіи многозначныхъ чиселъ на многозначныя. Чаще всего практикуемое, при письменномъ производствѣ умноженія многозначнаго числа на многозначное, записываніе множителя непремѣнно подъ множимымъ, ничѣмъ, съ точки зрѣнія методической, не можетъ быть оправдано. Равнымъ образомъ начинать умноженіе непремѣнно съ умноженія множимаго на единицы множителя, переходить затѣмъ къ умноженію на десятки множителя, далѣе на сотни множителя и т. д., также не представляетъ особенныхъ выгодъ. Невыгоды же этого способа заключаются въ слѣдующемъ: а) записывать множимое и множителя надобно подальше отъ лѣваго края доски (или листа бумаги), ибо въ противномъ случаѣ, если мы захотимъ единицы перваго частнаго произведенія записать непремѣнно подъ единицами множимаго и множителя, которые записаны одно подъ другимъ, то можетъ не хватить мѣста для записи высшихъ цифръ слѣдующихъ частныхъ произведеній. б) Умножить 3 576 на 425 значитъ найти произведеніе перваго числа на второе съ помощью таблицы умноженія; найти это произведеніе значитъ найти сумму 425-ти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно 3 576, а для нахожденія этой суммы естественно сначала найти сумму четырехсотъ такихъ слагаемыхъ, затѣмъ—еще двадцати такихъ же слагаемыхъ, и только наконецъ— пяти такихъ же слагаемыхъ, а не обратно. Ибо умъ человѣческій и ариѳметическое представленіе о числахъ предпочитаютъ сначала покончить съ единицами высшихъ разрядовъ, а не съ единицами разрядовъ низшихъ. Такъ, если кому-нибудь приходится получать деньги разными денежными знаками, то онъ инстинктивно сначала сосчитаетъ, сколько ему дано сотенныхъ бумажекъ, затѣмъ уже сколько денегъ бумажками слѣдующаго достоинства и т. д., переходя отъ денежныхъ знаковъ высшаго достоинства къ денежнымъ знакамъ достоинства низшаго. Да и называютъ числа, начиная съ единицъ высшаго разряда, и говорятъ: не 7 да 50, да 300, да 4000, а наоборотъ: 4357. Въ виду этой особенности нашего представленія о числѣ, для учениковъ прямо доступнѣе, какъ въ томъ убѣждаетъ и опытъ, начинать умноженіе съ умноженія множимаго на высшій разрядъ множителя, такъ что и съ методической точки зрѣнія этотъ послѣдній способъ умноженія болѣе цѣлесообразенъ. в) Начиная умноженіе многозначнаго числа на многозначное, съ умноженія множимаго на высшіе разряды множителя, мы въ первомъ же частномъ произведеніи получимъ наиболѣе значительную часть полнаго произведенія. Это часто очень важно для того, чтобы, если можно такъ выразиться, поскорѣе взвѣсить величину произведенія, т. е. опредѣлить, меньше чего оно уже быть не можетъ; методическія указанія относительно усвоенія дѣтьми разныхъ способовъ расположенія вычисленій приведены въ § 5 гл. V; г) умноженіе на многозначное число представляетъ собою задачу, притомъ сложную, потому что для рѣшенія ея приходится совершать болѣе одного дѣйствія. А при современномъ взглядѣ на запись рѣшенія задачи, эта запись должна вестись строчками, каковому требованію вовсе не отвѣчаетъ никому ненужное записываніе множителя подъ множимымъ. Но ему вполнѣ отвѣчаетъ записываніе множителя послѣ знака умноженія, поставленнаго справа, рядомъ со множимымъ, и записываніе отвѣта послѣ знака равенства, который стоитъ рядомъ со множителемъ. Этотъ знакъ равенства съ записью произведенія придаетъ всей записи законченность.

Повѣрка умноженія.

Относительно повѣрки умноженія надо помнить то же, что сказано выше относительно повѣрки другихъ двухъ дѣйствій: безусловной и достовѣрной повѣрки не существуетъ. Въ случаѣ, если по вторичномъ умноженіи получился тотъ же результатъ, что и прежде, мы можемъ только съ нѣкоторою вѣроятностью утверждать, что дѣйствіе произведено вѣрно. Ручательствомъ же за вѣрность разъ полученнаго результата можетъ служить только привычка къ правильному вычисленію, совершаемому съ полнымъ разумѣніемъ и серьезностью, и нѣкоторая внутренняя увѣренность вычисляющаго въ томъ, что онъ не имѣетъ права и не долженъ допускать ошибокъ въ вычисленіи. Всѣ эти соображенія весьма важны для 27-й ступени нашего курса.

Задачи на умноженіе цѣлъ ихъ на этой ступени.

Есть много видовъ задачъ, требующихъ умноженія. Такъ, напр., въ одной задачѣ спрашивается: сколько перьевъ въ 12 коробкахъ, если въ каждой коробкѣ по 144 пера; въ другой: сколько у одного гуртовщика овецъ, если извѣстно, что у него въ 12 разъ больше, чѣмъ у другого, у котораго 144 овцы; въ третьей: сколько у меня денегъ, если извѣстно, что у одного лица въ 3 раза меньше, чѣмъ у меня и что у него 37 рублей; въ слѣдующей задачѣ: какъ велико нѣкоторое число, если извѣстно, что, раздѣливъ его на 17 одинаковыхъ частей, мы въ каждой части получимъ 536, и т. д. („Задачникъ для уч—лей", вып. I, № 244). Цѣль всѣхъ этихъ упражненій заключается не въ томъ, чтобы ученики произвели дѣйствіе умноженія (они его производить уже умѣютъ), а въ томъ, чтобы они объединили всѣ эти случаи и постигли, что во всѣхъ этихъ случаяхъ требуется найти сумму нѣкотораго числа равныхъ слагаемыхъ и что для отысканія этой суммы они поступаютъ не по правиламъ сложенія. Къ этимъ задачамъ и должны, собственно говоря, примыкать всѣ тѣ размышленія, которыя изложены выше относительно происхожденія умноженія и которыя должны привести учениковъ къ болѣе точному понятію объ умноженіи, какъ о нѣкоторомъ новомъ, крайне полезномъ, пользующемся особыми средствами и даже, такъ сказать, благодѣтельномъ дѣйствіи.

Перемѣна порядка сомножителей.

Къ закону, по которому произведеніе двухъ сомножителей не зависитъ отъ порядка ихъ, приходится возвращаться много разъ въ теченіе всего курса (ср. ступени 9-ую, 11-ую, 16-ую, 21-ую). Но при усвоеніи дѣтьми точнаго понятія объ умноженіи, особеннаго вниманія заслуживаетъ этотъ законъ также потому, что здѣсь представляется полная возможность твердо установить и укрѣпить ту привычку учениковъ, ими раньше уже, конечно, пріобрѣтенную, благодаря которой они должны множителя всегда считать по существу своему отвлеченнымъ числомъ. Если бы намъ было дано равенство $5 \times 8 = 8 \times 5$, то, сдѣлавъ въ первой части этого равенства множимое именованнымъ числомъ, мы должны будемъ утверждать, что данное намъ равенство свидѣтельствуетъ о существованіи безконечнаго ряда другихъ равенствъ: 5 руб. $\times$ 8 все равно, что 8 руб. $\times$ 5; 5 саж. $\times$ 8 все равно, что 8 саж. $\times$ 5; 5 дней $\times$ 8 все равно, что 8 дней $\times$ 5 и т. д. Само собою разумѣется, что усвоеніе учениками ученія объ умноженіи съ точки зрѣнія приведенныхъ выше параграфовъ „Ариѳметики для начальныхъ школъ" возможно только послѣ того, какъ ими разрѣшены надлежащія задачи (№ 244), и послѣ того, какъ эти задачи надлежащимъ образомъ освѣщены. Ученіе о независимости величины произведенія отъ порядка сомножителей надо ставить не на почву доказательства, а на почву наглядныхъ представленій, и разрабатывать съ помощью воздѣйствія на воображеніе учениковъ, хотя бы, напр., слѣдующимъ образомъ. Требуется 8 р. взять 5 разъ слагаемымъ, т. е. 8 р. умножить на 5; если вмѣсто того, чтобы сложить

$$8\text{ р.} + 8\text{ р.} + 8\text{ р.} + 8\text{ р.} + 8\text{ р.};$$

отъ каждаго слагаемаго сначала возьмемъ 1 рубль и сложимъ эти рубли, то получимъ

$$1\text{ р.} + 1\text{ р.} + 1\text{ р.} + 1\text{ р.} + 1\text{ р.},\ \text{т. е. } 5\text{ р.}$$

Осталось же у насъ

$$7\text{ р.} + 7\text{ р.} + 7\text{ р.} + 7\text{ р.} + 7\text{ р.}$$

Возьмемъ отъ этихъ слагаемыхъ опять по одному рублю изъ каждаго и сложимъ эти слагаемыя, опять получимъ:

$$1\text{ р.} + 1\text{ р.} + 1\text{ р.} + 1\text{ р.} + 1\text{ р.},\ \text{т. е. опять } 5\text{ р.}$$

И т. д. Остальное ясно. Еще лучше, если множимое и множитель взяты болѣе значительные. — Хорошо прибѣгнуть также къ наглядным пособіямъ: косточкамъ счетовъ, къ кучкамъ кубиковъ, клочкамъ бумаги, разложеннымъ въ конвертики, спичкамъ (соломѣ), связаннымъ въ небольшіе пучки. Удобны также числовыя фигуры со многими значками. Наименѣе удобны косточки счетовъ, если ученики привыкли придавать имъ десятичныя значенія въ зависимости отъ мѣста проволоки.

Сокращенное вычисленіе произведенія.

Серьезное вниманіе надо посвятить отысканію произведенія въ тѣхъ случаяхъ, когда множители равны 5, 25, 9, 99. Дѣло въ томъ, что въ этихъ случаяхъ производить умноженіе по правиламъ письменнаго производства этого дѣйствія, составленнымъ для множителей какой угодно величины, не слѣдуетъ. Множители 5, 25, 9, 99 и многіе другіе представляютъ собою числа особенныя: 5 представляетъ собою половину 10-ти, 25 — четверть ста, 9 меньше 10-ти на одну единицу, 99 меньше ста тоже на одну единицу. А потому,

при умноженіи на эти числа, надо пользоваться не непосредственно таблицею умноженія, а только-что указанными свойствами данныхъ чиселъ (№№ 248—250 „Задачника для учениковъ“). Сюда же примыкаютъ (№№ 251 „Задачника для учителей“ и 252 „Задачника для учениковъ“) упражненія, въ которыхъ множители 15 и 45; число 15 представляетъ собою число, которое равно 10-ти и половинѣ 10-ти, а 45 равно 50-ти безъ десятой доли 50-ти. Не пользоваться составомъ множителя въ подобныхъ случаяхъ было-бы въ высшей степени неблагоразумно, такъ какъ въ каждомъ изъ этихъ случаевъ мы можемъ для отысканія произведеній избѣгнуть даже того, излишняго въ этихъ случаяхъ, труда, съ которымъ сопряжено непосредственное примѣненіе таблицы умноженія. Надо, однако, помнить, что во всѣхъ этихъ и имъ подобныхъ случаяхъ мы, хотя и отыскиваемъ произведенія данныхъ чиселъ, но умноженія, въ истинномъ и установленномъ выше смыслѣ этого слова, не дѣлаемъ. Въ этомъ-то именно и заключается преимущество только-что указанныхъ, болѣе изящныхъ, въ установленномъ ранѣе смыслѣ этого слова, способовъ вычисленія произведеній, когда множитель равенъ 5, 9, 25, 50, 15, 45, 99. Другихъ случаевъ (весьма многочисленныхъ) сокращеннаго нахожденія произведеній въ курсѣ одноклассной начальной школы можно только коснуться, — и то лишь въ четырехгодичной школѣ при томъ условіи, что третье или четвертое отдѣленіе весьма сильно въ ариѳметикѣ. (Объ этихъ случаяхъ см. также выпускъ II „Задачника для учителей“ №№ 65 и 66).—Расположеніе вычисленій въ указанныхъ выше и нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ можно практиковать слѣдующее:

$787 \times 9 =$	$637 \times 99 =$	$267 \times 98 =$
7870	63700	26700
—787	— 637	— 534

При этомъ нулей въ уменьшаемыя можно и не писать.

$79 \times 25 =$

7 900 : 4 = (этой строки можно и не писать).

$704 \times 125 =$

79 400

+19 850 (четверть перваго числа, вычисляемая безъ записей).

$794 \times 75 =$

79 400

—19 850 (то же!).

$794 \times 225 =$

158 800 (200 разъ 794)

+ 19 850 (осьмая доля перваго числа, вычисляемая безъ записей).

$794 \times 175 =$

158 800 } (разница только въ послѣднемъ дѣйствіи).

— 19 850 }

$794 \times 375 =$

238 200 (300 разъ 794)

+ 59 550 (четверть этого произведенія).

$746 \times 15 =$ 11 190

7 460 (помножено на 10)

+ 3 730 (половина удесятереннаго множимаго).

$317 \times 45 =$ 14 265

14 850 (произвед. на 50)

— 1 585 (произв. на 5).

При этомъ на 50 помножить можно, приписавъ мысленно къ множимому два нуля и раздѣливъ полученное пополамъ.

Дѣленіе.

§ 10. Къ 27-ой ступени относится также выработка болѣе точнаго понятія о дѣйствіи дѣленія на извѣстное число одинаковыхъ частей и о кратномъ сравненіи, т. е. о дѣленіи на извѣстныя равныя части или, какъ иногда называютъ это дѣйствіе, о дѣленіи по содержанію (№№ 253 и 254 „Задачника для учителей“). Надо дать ученикамъ понятіе о томъ, что дѣлимое во всякомъ случаѣ представляетъ собою произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно (дѣлитель) въ одномъ случаѣ представляетъ собою извѣстнаго множителя (въ случаѣ дѣленія на извѣстное число равныхъ частей), отыскиваютъ же неизвѣстное множимое (частное), а въ другомъ случаѣ второе извѣстное число (дѣлитель) представляетъ собою извѣстное множимое (при дѣленіи на извѣстныя части), отыскиваютъ же неизвѣстнаго множителя (отношеніе).

Логическія трудности дѣленія.

Изъ всѣхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій дѣленіе представляетъ собою наиболѣе какъ логиче-

скихъ, такъ и техническихъ трудностей. Изъ логическихъ трудностей замѣчательны слѣдующія. Пока мы имѣемъ дѣло съ такими случаями, когда дѣлимое равно произведенію дѣлителя на нѣкоторое число, до тѣхъ поръ самая цѣль дѣленія легко можетъ быть опредѣлена. Въ случаѣ же, если дѣлимое не представляетъ собою такого произведенія, является уже необходимость другого опредѣленія дѣленія. Дѣйствительно: сказать, что раздѣлить 15 на 4 значитъ найти третье число, которое надо помножить на 4 или на которое надо помножить 4, чтобы получить 15,—нелогично (пока мы говоримъ о цѣлыхъ числахъ, а вѣдь только таковыя числа мы имѣемъ въ виду), такъ какъ такого третьяго числа нѣтъ.

Нецѣлесообразность слишкомъ общихъ опредѣленій.

Чистымъ недоразумѣніемъ является стремленіе учебниковъ ариѳметики и нѣкоторыхъ учителей этого предмета къ составленію, даже въ области ариѳметики цѣлыхъ чиселъ, столь общихъ опредѣленій, которыя были бы пригодны для всѣхъ возможныхъ случаевъ, какіе могутъ встрѣтиться въ ариѳметикѣ. Не говоря уже о томъ, что для учениковъ такія общія опредѣленія безполезны, они и не всегда возможны. При одномъ и томъ же дѣлителѣ (напр., при дѣлителѣ, равномъ 3-мъ единицамъ) дѣленіе имѣетъ разный смыслъ, смотря по тому, будетъ ли дѣлимое равно 15-ти, 37-ми, 2-мъ или нулю. Въ первомъ случаѣ требуется найти ч и с л о, которое надо помножить 3, чтобы получить 15, а въ послѣднемъ случаѣ частное уже не представляетъ собою ч и с л а въ истинномъ смыслѣ этого слова. Во второмъ, изъ цѣлаго ряда чиселъ, произведеніе которыхъ на 3 менѣе 37-ми, мы выбираемъ число 12, произведеніе котораго на 3 менѣе 37-ми, но которое обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что если его увеличить на одну единицу, то мы получимъ число 13, котораго произведеніе на 3 болѣе 37-ми; Наконецъ, въ третьемъ случаѣ (когда дѣлимое менѣе дѣлителя) частное полагаютъ равнымъ нулю, считая, что произведеніе 0 . 3 равно нулю, и стало-быть менѣе дѣлимаго, а 1 . 3 = 3, т. е. болѣе дѣлимаго.—Все это въ одно опредѣленіе, конечно, включить возможно, но затруднительно, и особенныхъ выгодъ подобное опредѣленіе въ себѣ не содержало бы, еслибы мы даже его и составили. — То же справедливо и для опредѣленій другихъ дѣйствій, гдѣ есть частные случаи, подходящіе подъ общія опредѣленія лишь съ большими или меньшими обобщеніями. Поэтому § 56 и слѣдующіе „Ариѳметики для начальныхъ школъ“ стоятъ именно на этихъ точкахъ зрѣнія.

Вторая логическая трудность сводится къ двоякому смыслу, который придается слову „дѣленіе“, а именно: дѣлить можно не только на извѣстное, но и на неизвѣстное число одинаковыхъ частей. Когда мы дѣлимъ на извѣстное число одинаковыхъ частей, намъ неизвѣстна каждая часть; когда же мы дѣлимъ на извѣстныя части, намъ неизвѣстно число ихъ. Дальнѣйшая трудность заключается въ подведеніи обоихъ случаевъ подъ одно общее понятіе дѣленія,—въ обобщеніи, которое возможно сдѣлать только на почвѣ отвлеченныхъ чиселъ.

Неизвѣстное множимое.

Въ „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“ система опредѣленій слѣдующая (§§ 56—63). Пусть даны два числа, изъ которыхъ первое больше второго. При этомъ могутъ встрѣтиться два случая: 1) первое число представляетъ собою произведеніе нѣкотораго третьяго, намъ не даннаго, числа на второе; такъ, если даны числа 28 и 4, то первое изъ нихъ представляетъ произведеніе нѣкотораго третьяго числа (7-ми единицъ) на второе (т. е. на 4); 2) первое число не представляетъ собою произведенія какого-либо третьяго числа на второе; такъ, если даны числа 31 и 4, то 31 не представляетъ собою произведенія какого-либо третьяго числа на второе, потому что, какое бы цѣлое число ни помножить на 4, мы не получимъ 31-ой единицы. — Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, однако же, существуетъ такое третье число (7), что если мы его помножимъ на второе. т. е. на 4, то получимъ произведеніе 28, которое меньше перваго изъ данныхъ чиселъ (т. е. 31-го) на число 3, меньшее, чѣмъ второе изъ данныхъ намъ чиселъ.

Разница между этими случаями.

Въ первомъ изъ этихъ двухъ случаевъ даны: произведеніе двухъ чиселъ и множитель, а неизвѣстно множимое. Во второмъ же случаѣ даны: извѣстный множитель и число, которое не равно произведенію какого-либо цѣлаго множимаго на этого множителя, а болѣе произведенія нѣкотораго цѣлаго множимаго на даннаго множителя числомъ, которое меньше этого множителя.

Неизв. множитель.

Меньшее изъ данныхъ двухъ чиселъ можетъ представлять собою извѣстное множимое. Тогда возможны такіе же два случая, какіе разсмотрѣны выше.

Таблица дѣленія.

Для того чтобы, для всякой пары чиселъ, быстро вычислить неизвѣстнаго сомножителя, необходимо знать такъ называемую т а б л и ц у д ѣ л е н і я, т. е. знать на-память, какъ великъ неизвѣстный однозначный сомножитель, когда

извѣстны другой однозначный сомножитель и произведеніе обоихъ этихъ сомножителей.

Что значитъ раздѣлить? Пусть изъ данныхъ двухъ чиселъ первое (большее) равно произведенію второго (меньшаго) числа на нѣкоторое третье. Въ этомъ случаѣ раздѣлить большее число на меньшее, значитъ, пользуясь таблицею дѣленія, по данному произведенію двухъ сомножителей и одному изъ нихъ, найти другого сомножителя. Такъ, раздѣлить 45 на 5 значитъ найти, пользуясь таблицей дѣленія, число 9, которое надо помножить на 5 (или на которое надо помножить 5), чтобы получить 45.

Пусть изъ данныхъ двухъ чиселъ первое (большее) не равно произведенію меньшаго числа на нѣкоторое третье число. Тогда можно найти такого сомножителя, что если второе число помножить на него (или его помножить на второе), то получится произведеніе, которое менѣе большаго числа на число, меньшее, чѣмъ второе. Въ этомъ случаѣ раздѣлить большее число на меньшее также значитъ, пользуясь таблицею дѣленія, найти этого неизвѣстнаго сомножителя. Такъ, если даны числа 47 и 5, то раздѣлить 47 на 5 значитъ, найти пользуясь таблицей дѣленія, число 9, которое надо помножить на 5 (или на которое надо помножить число 5), чтобы получить число 45, причемъ 45 меньше даннаго намъ большаго числа (47-ми) на число 2, въ свою очередь меньшее, чѣмъ данное намъ второе число (т. е. 5).

Дѣлимое, дѣлитель, частное и остатокъ. Число, которое требуется раздѣлить на другое, называется дѣлимымъ, второе число (извѣстный сомножитель)—дѣлителемъ, а неизвѣстный сомножитель — частнымъ отъ раздѣленія дѣлимаго на дѣлителя, или просто частнымъ. Если дѣлимое не равно произведенію дѣлителя на частное, или (что—то же) не равно произведенію частнаго на дѣлителя, то разность между дѣлимымъ и этимъ произведеніемъ называется остаткомъ отъ дѣленія, или остаткомъ. — Такъ, если требуется раздѣлить 45 на 5, то 45—дѣлимое, 5—дѣлитель, а 9—частное. Если же даны числа 47 и 5, и требуется раздѣлить 47 на 5, то 47 — дѣлимое, 5—дѣлитель, 9—частное, а 2—остатокъ. Если дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, или (что — то же) произведенію частнаго на дѣлителя, то говорятъ, что дѣленіе совершается на-цѣло безъ остатка, или же говорятъ, что остатокъ отъ дѣленія равенъ нулю.

Относительно нуля какъ частнаго (случай весьма важный!) въ „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“ находимъ слѣдующее:

Нуль какъ частное. Если меньшее число разсматривать какъ сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно равно произведенію большаго числа на нуль (т. е. нулю), а другое равно столькимъ единицамъ, сколько ихъ содержится въ меньшемъ числѣ, то тогда можно считать, что, напр., $7 = 0 \times 9 + 7$. Считаютъ, что отъ раздѣленія меньшаго числа на большее въ частномъ получается нуль, а въ остаткѣ—меньшее число. Это можно записать такъ: $7 : 9 = 0$ (ост. 7).

Немаловаженъ и тотъ особенный случай, когда дѣлитель равенъ единицѣ и смыслъ этого дѣленія (§ 70 „Ариѳметики для начальныхъ школъ“).

Общее опредѣленіе обоихъ видовъ дѣленія. Но труднѣе всего подведеніе обоихъ случаевъ дѣленія подъ понятія боъ одномъ дѣйствіи. Пока мы имѣемъ дѣло съ даннымъ примѣромъ на тотъ или другой видъ дѣленія, особенныхъ трудностей уясненіе смысла дѣленія не представляетъ. Чрезвычайно зато велики затрудненія, къ которымъ приводитъ желаніе подвести оба дѣйствія подъ одно общее опредѣленіе дѣленія вообще. Это подведеніе требуетъ большой аккуратности въ отдѣлкѣ.—Въ то время какъ во второй годъ обученія врядъ ли можетъ даже представиться надобность въ подобномъ подведеніи и въ то время какъ оно для учениковъ 2-го отдѣленія преисполнено большихъ, чисто-логическихъ, трудностей, въ 3-й и 4-й годъ, хотя бы прямая въ томъ надобность даже и не представилась, это подведеніе можетъ оказаться, по крайней мѣрѣ, болѣе или менѣе возможнымъ. Сказать, что въ каждомъ изъ двухъ случаевъ дѣленія даны произведеніе двухъ сомножителей и одинъ изъ нихъ и что поэтому оба вида дѣленія носятъ одно и то же общее названіе, значитъ не сказать ничего такого, что учениковъ могло бы въ чемъ-либо убѣдить. Въ лучшемъ случаѣ, это значитъ—сказать очень мало. Это только будетъ чисто-словеснымъ, отвлеченнымъ, призрачнымъ для ученика, оправданіемъ общаго названія. Это будетъ, если можно такъ выразиться, почти безсодержательною отговоркою, которая ничего не скажетъ ни воображенію, ни уму учащагося. Несмотря, однако же, на это, ученіе о дѣленіи можетъ быть преподнесено учащемуся, согласно требованіямъ логическимъ (см. § 72 „Ариѳметики для начальныхъ школъ“). Правда, въ обоихъ случаяхъ дѣлятъ число: въ одномъ случаѣ его дѣлятъ на извѣстное число одинаковыхъ частей, а въ другомъ — на извѣстныя одинаковыя части, и такая постановка вопроса ученикамъ вполнѣ доступна. Но этого мало, и можно

посмотрѣть на занимающій насъ вопросъ и съ другой, менѣе опирающейся на слова, точки зрѣнія (§ 62).

Связь обоихъ видовъ дѣленія. Пусть требуется раздѣлить 387 465 единицъ на извѣстное число, напр., на 15, равныхъ частей. Для того чтобы вычислить, какъ велика каждая часть, можно разсуждать также слѣдующимъ образомъ: возьмемъ изъ дѣлимаго 15 единицъ и разложимъ ихъ на 15 одинаковыхъ частей, по одной единицѣ въ каждой части; послѣ этого возьмемъ еще 15 единицъ изъ дѣлимаго и поступимъ съ ними точно такъ же, и еще 15 единицъ, и еще, и еще, до тѣхъ поръ, пока единицы дѣлимаго не будутъ исчерпаны. Въ каждой части получится по столько единицъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ. Отсюда слѣдуетъ, что число единицъ частнаго, происходящаго отъ раздѣленія дѣлимаго на извѣстное число одинаковыхъ частей, равно отношенію отвлеченнаго значенія дѣлимаго къ дѣлителю. — Поэтому можно, вмѣсто дѣленія даннаго числа на извѣстное число одинаковыхъ частей, произвести дѣленіе дѣлимаго на извѣстныя одинаковыя части. Обратно: вмѣсто дѣленія даннаго числа на извѣстныя одинаковыя части, можно произвести дѣленіе на извѣстное число одинаковыхъ частей. Отвлеченное число единицъ частнаго будетъ одно и то же въ обоихъ случаяхъ. Такъ, 12 р. | 3 = **4** р., а 12 р. : 3 р. = **4**.

Происхожденіе дѣленія. Чтобы вполнѣ постигнуть, въ чемъ именно состоитъ сущность дѣленія одного отвлеченнаго числа на другое, мы поступимъ слѣдующимъ образомъ. Пусть дано какое-нибудь число, напр., 26 381 и другое число, напр., 217. Тогда можно себѣ предложить слѣдующіе четыре вопроса: 1) существуетъ ли такое третье число, на которое надо помножить 217 или которое надо помножить на 217 для того, чтобъ получить 26 381? 2) если такое число существуетъ, то какъ его разсчитать? 3) если оно не существуетъ, то существуетъ ли такое число, которое надо помножить на 217 или на которое надо помножить 217 для того, чтобы получить число меньшее, чѣмъ 26 381, и которое, кромѣ того, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что если взять число большее, чѣмъ оно, на одну единицу и это послѣднее число помножить на 217 или же 217 помножить на него, то получится больше, чѣмъ 26 381? и 4) какъ вычислить въ этомъ послѣднемъ случаѣ интересующее насъ число?—Для рѣшенія вопросовъ есть два способа: а) Если бы мы хотѣли искомое

число отыскать съ помощью умноженія, то намъ пришлось бы 217 сначала помножить на 2, потомъ 217 помножить на 3, затѣмъ 217 помножить на 4 и т. д., до тѣхъ поръ, пока мы, наконецъ, не добрались бы до такого произведенія, которое равно 26 381, или же до такихъ двухъ произведеній, изъ которыхъ одно меньше, чѣмъ 26 381, а другое больше, чѣмъ это послѣднее число. Такимъ образомъ мы нашли бы интересующее насъ число: оно было бы равно—въ первомъ случаѣ послѣднему множителю, а во второмъ—предпослѣднему множителю. б) Мы могли бы узнать—сколько разъ 217 содержится въ 26381-мъ, и иначе: вычтя 217 изъ 26 381-го, мы могли бы изъ остатка снова вычесть 217, изъ новаго остатка—опять вычесть 217 и т. д. до тѣхъ поръ, пока у насъ получится остатокъ меньшій, чѣмъ 217; затѣмъ, сосчитавъ, сколько мы разъ сдѣлали вычитаніе, по этому судить о томъ, сколько разъ надо 217 взять слагаемымъ, чтобы получить 26 381 или число, меньшее, чѣмъ 26 381, на нѣкоторое число, меньшее, чѣмъ 217.—Но первый способъ вычисленія искомаго числа въ высшей степени утомителенъ и требуетъ отъ насъ многократнаго производства дѣйствія умноженія на нѣкоторый рядъ, послѣдовательно возрастающихъ на одну единицу, чиселъ. Второй же способъ требуетъ многократнаго производства вычитанія, на которое также пришлось бы потратить очень много труда и времени.—Полезно, если ученики часть своего досуга употребятъ на подобныя (конечно, не столь утомительныя) вычисленія, для того чтобы убѣдиться въ полной непримѣнимости указанныхъ выше и имъ подобныхъ способовъ вычисленія.

Частное или отношеніе. Искомое отвлеченное число, какимъ бы образомъ мы его ни вычислили, называется либо частнымъ, либо отношеніемъ большаго изъ данныхъ чиселъ къ меньшему, и отысканіе этого частнаго или отношенія представляетъ собою цѣль того дѣйствія, которое извѣстно подъ именемъ дѣленія. Средствомъ же къ достиженію этой цѣли является такъ называемая таблица дѣленія. Это—рядъ равенствъ, въ первой части которыхъ выражено требованіе относительно раздѣленія любого однозначнаго и тѣхъ многочисленныхъ двузначныхъ чиселъ на однозначныя числа, которыя даютъ въ результатѣ однозначное число, представляющее собою отношеніе большаго числа къ меньшему.—Дальнѣйшее изложеніе ученія о дѣленіи въ „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“ (Спб. 1903) вообще мало отличается отъ обычно практикуемаго изложенія этого ученія въ другихъ учеб-

никахъ. Нѣкоторыя различія есть въ изложеніи дѣленія на закруглимое число (§ 66), на число незакруглимое, на взаимную связь между способами производства дѣленія одного рода и дѣленія другого рода.

Связь обоихъ видовъ дѣленія. Хотя въ приведенномъ выше параграфѣ „Ариѳметики для нач. школъ“ и изложена эта связь, но учителю можетъ понадобиться менѣе отвлеченная, а болѣе опирающаяся на воображеніе учениковъ, предварительная проработка этого же ученія. Поэтому можно держаться, напр., слѣдующей формы проработки. Пусть здѣсь у меня 1 015 спичекъ (хорошо, если пачка „спичекъ“ дѣйствительно есть у учителя подъ руками!) и пусть всѣ спички разложены въ кучки по 35 шт. спичекъ въ каждой; сколько получилось такихъ кучекъ, я не знаю... Возьму изъ каждой кучки одну спичку и составлю новую кучку, которую отложу въ сторону; въ этой новой кучкѣ столько спичекъ, сколько раньше было кучекъ по 35-ти спичекъ въ каждой; въ прежнихъ кучкахъ теперь—по 34 спички въ каждой; беру изъ каждой по одной спичкѣ и составляю опять новую кучку по столько спичекъ въ каждой, сколько всѣхъ старыхъ кучекъ; эту новую кучку опять откладываю отдѣльно въ сторону; тогда въ прежней старой кучкѣ осталось по 33 спички. Продолжаю это еще и еще разъ и такъ долго это продѣлываю, покуда не исчерпаю всѣхъ спичекъ. Тогда я получу 35 новыхъ кучекъ, а въ каждой изъ нихъ столько спичекъ, сколько раньше было всего кучекъ... Это значитъ: если мнѣ надо узнать—сколько можно составить изъ 1 015-ти спичекъ кучекъ по 35-ти спичекъ въ каждой кучкѣ, то я могу 1 015 спичекъ раздѣлить на 35 равныхъ кучекъ, и сколько спичекъ въ каждой изъ этихъ новыхъ кучекъ, столько кучекъ по 35-ти спичекъ въ каждой можно составить изъ 1 015 спичекъ. — Уразумѣніе возможности замѣны кратнаго сравненія дѣленіемъ на равныя части для дѣтей вовсе не такъ легко, какъ это можетъ казаться человѣку, смотрящему на ариѳметику исключительно съ точки зрѣнія учебниковъ.—Относительно повѣрки дѣленія распространяться не для чего, такъ какъ все сказанное ранѣе о провѣркѣ другихъ дѣйствій относится въ такой же мѣрѣ и къ провѣркѣ дѣйствія дѣленія.

Дроби. Къ той же, 27-ой, ступени относятся упражненія надъ дробями, которымъ должны быть посвящены (№№ 255—261 „Задачника для учителей“) упражненія подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, и не посвящено на этой ступени ни одного самостоятельнаго упражненія. Здѣсь ученики должны ознакомиться съ происхожденіемъ дроби, со сравненіемъ дробей, у которыхъ одинаковые знаменатели, съ вычисленіемъ, посредствомъ котораго рѣшается вопросъ, какую часть одного цѣлаго числа составляетъ другое, съ обозначеніемъ дробей, у которыхъ знаменатели отличаются отъ двухъ и четырехъ, и наконецъ — съ нахожденіемъ частей нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ. При этомъ должно брать дроби изъ числа наиболѣе часто встрѣчающихся: половины, четверти, пятыя, восьмыя, десятыя, двадцатыя, сороковыя и сотыя. Къ этой же, 27-ой, ступени можетъ быть отнесено рѣшеніе нѣкоторыхъ сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ не приведеннаго вида (§ 11 гл. V).

Измѣненія суммы и разности. § 11. На двадцать седьмой ступени обученія можно пройти съ дѣтьми ученія объ измѣненіяхъ суммы, остатка, произведенія и частнаго. (Эти ученія отнесены къ №№ 270а—270ж „Задачника для учителей“). Само собою разумѣется, что они должны быть поставлены на почву весьма наглядныхъ представленій. Такъ, ученіе объ измѣненіи суммы слѣдуетъ начинать со случая двухъ слагаемыхъ, и притомъ одно изъ этихъ слагаемыхъ сначала надо увеличить на одну только единицу. Опираться при этомъ на опредѣленіе сложенія не для чего, такъ какъ измѣненіе суммы, въ зависимости отъ измѣненія одного изъ слагаемыхъ, принадлежитъ къ числу самыхъ очевидныхъ ариѳметическихъ фактовъ. Правило должно быть выражено, равнымъ образомъ, безусловно просто, безъ всякаго стремленія къ полному объединенію всѣхъ возможныхъ случаевъ. Достаточно, если ученикъ въ состояніи сказать слѣдующее: если одно слагаемое увеличить на нѣсколько единицъ, то сумма увеличится на столько же, или: если одного слагаемое уменьшить на нѣсколько единицъ, то сумма уменьшится на столько же. Случаевъ одновременнаго измѣненія нѣсколькихъ слагаемыхъ можно только коснуться наглядно, вовсе не требуя непремѣнно громоздкаго правила относительно зависящаго, отъ этого измѣненія, увеличенія или уменьшенія суммы. Все это ученіе вообще настолько очевидно, что уснащать курсъ многочисленными и, къ тому же, прямо безполезными правилами представляется, по меньшей мѣрѣ, не цѣлесообразнымъ.—Что касается измѣненія остатка, то относительно этого ученія, конечно, можно учениковъ привести къ пользованію точнымъ опредѣленіемъ вычитанія и къ логическому выводу о всѣхъ возможныхъ случаяхъ измѣненія. Но на самомъ дѣлѣ и

это также излишне, если принять во вниманіе ту точку зрѣнія, на которой стоятъ ученики начальной школы на данной ступени. Рѣшеніе всѣхъ вопросовъ объ измѣненіи остатка гораздо проще, если ученикъ опирается въ своихъ сужденіяхъ прямо на то, что уменьшаемое выражаетъ, сколько было единицъ, а остатокъ — сколько осталось, и что если вначалѣ было больше, а отнято столько же, то и остаться должно больше; если же отнято больше изъ того же числа, то остаться должно, конечно, меньше. Прибѣгать въ этомъ случаѣ къ услугамъ и къ смыслу опредѣленія вычитанія для выясненія ученикамъ законовъ измѣненія разности или остатка надобно было бы только въ томъ случаѣ, если бы иначе, т. е. безъ помощи опредѣленія, достигнуть должныхъ результатовъ было невозможно, или недостаточно основательно.

Измѣненія произведенія. § 12. Въ иномъ положеніи находится ученіе объ измѣненіяхъ произведенія. Во-1-хъ, это ученіе прежде всего не можетъ быть исчерпано на данной ступени обученія вполнѣ, такъ какъ случай, когда множимое увеличено, напр., въ 7 разъ, а множитель въ 3 раза, требуетъ отъ учениковъ уже очень хорошаго знанія дробей, въ то время какъ у нихъ на самомъ дѣлѣ о дробяхъ имѣются лишь самыя первоначальныя познанія. Во-2-хъ, связь между произведеніемъ и сомножителями гораздо сложнѣе, чѣмъ связь между искомыми и данными числами при сложеніи и вычитаніи. Тѣмъ не менѣе, изученіе измѣненія произведенія надо начинать со случаевъ простыхъ и съ задачъ вполнѣ наглядныхъ. Тетрадь стоитъ 4 коп., такихъ тетрадей куплено 5 штукъ; сколько истрачено? А если бы тетрадь стоила не 4 коп., а напр., 8 коп., и куплено было бы тоже 5 шт., сколько тогда было бы истрачено: больше или меньше? Почему больше? (потому что каждая тетрадь дороже). Во сколько разъ больше? (въ два раза). Почему въ два раза? и т. д. Или: „мнѣ надо произвести умноженія 12 на 7 и 24 на 7, но я не буду умножать, а спрошу: когда я получу больше,— тогда ли, когда умножу 12 на 7, или же, когда умножу 24 на 7? Что это значитъ: 12 помножить на семь? Не значитъ ли это найти сумму $12+12+12+12+12+12+12$? Что значитъ 24 помножить на 7?... какая же изъ суммъ больше? Почему больше? (Потому что каждое слагаемое больше). Во сколько разъ больше? Почему въ 2 раза больше? (Каждая часть въ два раза больше, и цѣлое, т. е. сумма всѣхъ частей, должна быть въ два раза больше)“. Нѣчто подобное намѣченной выше въ общихъ чертахъ проработкѣ случая, когда увеличивается множимое, притомъ въ

нѣсколько разъ, можетъ быть продѣлано также и для случая, когда увеличенію въ нѣсколько разъ подвергается множитель: „Что больше 12×7 или же 12×14? Что это значитъ 12×7? А что значитъ 12×14? Сколько слагаемыхъ въ первомъ случаѣ? Сколько во второмъ? Какъ велико каждое слагаемое? Какая же сумма больше? Почему? (Потому что слагаемыхъ во второмъ случаѣ больше, и равны между собою)“. И т. д. Правила, относящіяся до измѣненій всѣ они произведенія въ этихъ двухъ простѣйшихъ случаяхъ, должны отличаться безусловной простотой. Въ курсѣ ариѳметики нѣтъ никакой надобности стремиться непремѣнно ко всеобъемлющимъ правиламъ, и вполнѣ достаточно, если каждый данный случай ученики понимаютъ должнымъ образомъ.

Одновременное увеличеніе обоихъ сомножителей въ нѣк. число разъ. Нѣкоторое затрудненіе представляютъ, правда, рѣдкіе случаи одновременнаго увеличенія каждаго изъ двухъ сомножителей въ нѣсколько разъ или уменьшенія каждаго изъ нихъ въ нѣсколько разъ. Но стремленіе нѣк. учителей къ отвлеченному умозаключенію, основанному на измѣненіяхъ только одного изъ сомножителей въ нѣсколько разъ, какъ показываетъ опытъ, обыкновенно не приводитъ къ цѣли. Если вы спрашиваете ученика: „что случится послѣ увеличенія множимаго въ 5 разъ и множителя въ 3 раза?“ и желаете его навести на выводъ истинный, то, при отвлеченномъ разборѣ и разсужденіи, получается слѣдующее: отъ увеличенія множимаго въ 5 разъ, произведеніе тоже увеличивается въ 5 разъ; отъ увеличенія же множителя въ 3 раза произведеніе увеличивается въ 3 раза, и ученикъ склоненъ изъ этихъ двухъ вполнѣ вѣрныхъ основаній сдѣлать то совершенно невѣрное заключеніе, что произведеніе увеличивается въ этомъ случаѣ въ 8 разъ.—Для того чтобы избѣгнуть такого невѣрнаго вывода, въ неправильности котораго ученикъ, конечно, нимало не виновенъ, учителю надо принять во вниманіе, что сужденіе о результатѣ одновременнаго вліянія двухъ причинъ на одно и то же явленіе даже для взрослаго человѣка затруднительно. Гораздо лучше поставить дѣло слѣдующимъ, напр., образомъ, гдѣ нѣтъ стремленія къ отвлеченному умозаключенію:

Что сдѣлается съ произведеніемъ, если множимое увеличить въ 7 разъ, а множителя тоже увеличить, но въ 3 раза?...—Возьмемъ примѣръ: пусть требуется помножить 16 на 12.

$16\times12=192$,— первоначальное произведеніе. Вм. 16-ти возьмемъ число, въ 7 разъ большее, а множитель пусть останется тотъ же, т. е. 12; получимъ (такъ какъ $16\times7=112$):

если ученикъ умѣетъ разбираться въ случаяхъ подобнаго рода и никогда не ошибается относительно истиннаго измѣненія произведенія при одновременномъ увеличеніи или уменьшеніи обоихъ сомножителей. Кромѣ того, учитель наибольшее вниманіе свое долженъ обращать на то, чтобы ученики вполнѣ уразумѣли тотъ логическій процессъ умозаключенія изъ вышеприведенныхъ трехъ строчекъ, который приводитъ къ правильному заключенію относительно измѣненія произведенія. Практическое же значеніе этого не велико. (Выше многоточія означаютъ необходимость повторенія сказаннаго учениками).

Измѣненія частнаго.

§ 13. Что касается измѣненій частнаго, то измѣненія эти должны быть разсматриваемы отдѣльно для каждаго изъ слѣдующихъ случаевъ: а) когда дѣлимое дѣлится нацѣло безъ остатка и когда дѣленіе это совершается безъ остатка также послѣ измѣненія одного или обоихъ данныхъ чиселъ, и б) когда дѣлимое съ самаго начала не дѣлилось на дѣлителя нацѣло безъ остатка и когда измѣненное дѣлимое не дѣлится на даннаго дѣлителя, или данное дѣлимое не дѣлится на измѣненнаго дѣлителя.—Правила этихъ измѣненій должно составлять съ большою осторожностью. Такъ, напр., если дѣлимое не дѣлится на-цѣло безъ остатка на дѣлителя (напр., 25 : 3), то нельзя сказать, что частное отъ увеличенія дѣлимаго въ 10 разъ увеличится тоже ровно въ 10 разъ. Большинство правилъ должно относиться къ случаямъ наиболѣе часто встрѣчающимся. Не надо, напр., останавливаться на случаѣ, когда дѣлимое увеличено въ нѣсколько разъ, а дѣлитель тоже увеличенъ, но въ нѣкоторое другое число разъ. Этотъ случай требуетъ иногда весьма хорошихъ знаній изъ области ученія о дробяхъ. При составленіи правилъ надо имѣть въ виду только случаи, при которыхъ дѣлимое дѣлится на дѣлителя на-цѣло, безъ остатка; но изъ этого не слѣдуетъ, чтобы отъ учениковъ скрывалась трудность составленія общихъ правилъ. Опираться при изученіи измѣненій частнаго на опредѣленія дѣленія также не слѣдуетъ; это создало бы только большую совокупность соображеній, носящихъ слишкомъ отвлеченный характеръ. Правила могутъ гласить такъ: если дѣлимое дѣлится на-цѣло безъ остатка на дѣлителя и если дѣлимое увеличить въ нѣсколько разъ, то частное увеличится во столько же разъ; если дѣлимое дѣлится на дѣлителя на-цѣло безъ остатка, если дѣлимое уменьшить въ нѣсколько разъ и если послѣ этого дѣлимое тоже раздѣлится на дѣлителя на-цѣло безъ остатка, то частное уменьшится во столько же разъ, и т. п.

Истинное значеніе правилъ измѣненія произведенія и частнаго.

Истинное значеніе этого ученія весьма незначительно. Съ точки зрѣнія алгебраическихъ обозначеній, всѣ эти ученія выражаются очень простыми формулами. Съ точки же зрѣнія ариѳметической, нѣкоторыя правила приложимы только къ случаямъ сокращенныхъ вычисленій суммъ, разностей, произведеній и частныхъ въ частныхъ случаяхъ. Словесная форма правилъ, относящихся до занимающей насъ статьи, крайне сложна и многословна. При этомъ форма не отвѣчаетъ содержательности статьи. Въ „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“ (Спб., 1903) статья эта, въ качествѣ не во всемъ своемъ объемѣ обязательной (особенно для школъ съ трехгодичнымъ курсомъ), приведена въ §§ 104—109.

Смѣшанныя задачи.

§ 14. Самостоятельныя упражненія помѣщены въ „Задачникѣ для уч—ковъ“ подъ №№ 270б, 270г, 270е. Подъ № 270з помѣщено двадцать смѣшанныхъ задачъ, относительно рѣшенія которыхъ учениками подъ руководствомъ и безъ руководства учителя должно помнить, что въ случаѣ затрудненій при ихъ рѣшеніи, ихъ надобно обратить въ задачи приведенныя, болѣе прозрачныя:

270з. Шесть десятковъ яблокъ стоятъ торговцу столько же, сколько стоятъ четыре десятка грушъ; продавая десятокъ грушъ по 80 к., торговецъ получаетъ на каждой грушѣ по 2 к. прибыли. Почемъ ему обошлось яблоко?

2-ая. Торговецъ платилъ за сахаръ по 4 р. 40 к. за пудъ, а продавалъ по 15 к. за фунтъ. Сколько онъ получилъ прибыли на 15-ти головахъ сахару, если каждая вѣсила 26 фунтовъ?

4-ая. При постройкѣ дома уплачено каменщикамъ, плотникамъ и кровельщикамъ 753 руб.; всего работало 5 плотниковъ, 15 каменщиковъ и 6 кровельщиковъ; каменщики получали по 37 руб., а плотники—по 24 руб. Сколько получалъ каждый кровельщикъ?

5-ая. Изъ 10 фунтовъ муки вышло 13 фунтовъ печенаго хлѣба. Сколько фунтовъ хлѣба выйдетъ изъ 4-хъ съ половиною пудовъ муки?

7-ая. Куплено 17 ящиковъ яблокъ и 25 ящиковъ грушъ; за яблоки заплачено 76 руб. 50 коп., а за груши 118 р. 75 коп.; яблоки проданы за 90 р. 10 коп., а груши—за 143 р.

Торговецъ продаетъ десятокъ грушъ по 80 к.; при этомъ онъ получаетъ на грушѣ по 2 к. прибыли; четыре десятка грушъ ему стоятъ столько же, сколько стоятъ 6 десятковъ яблокъ. И т. д.

Торговецъ платилъ за сахаръ по 4 р. 40 к. за пудъ; въ пудѣ 40 фунтовъ; продавалъ онъ этотъ сахаръ по 15 коп. за фунтъ; голова сахару вѣситъ 26 фунтовъ; онъ продалъ 15 головъ такого сахару. Сколько онъ получилъ прибыли?

15 каменщиковъ, работавшихъ на постройкѣ, получили по 37 руб., 5 плотниковъ по 24 рубля; кромѣ плотниковъ и каменщиковъ, на постройкѣ работали кровельщики; всѣ плотники, каменщики и кровельщики получили 753 рубля; кровельщиковъ было 6 человѣкъ. Сколько получилъ каждый кровельщикъ?

Въ пудѣ 40 ф.; изъ 4-хъ съ половиною пудовъ муки испеченъ хлѣбъ; изъ 10-ти ф. муки получается 13 ф. хлѣба. Сколько фунтовъ хлѣба испечено?

Куплены яблоки за 76 р. 50 к., а проданы—за 90 р. 10 к.; яблокъ куплено 17 ящиковъ; за груши заплачено 118 р. 75 к., а выручено за нихъ 143 руб. 75 к.; грушъ куплено

75 к. Сколько получено прибыли на ящикѣ грушъ и сколько на ящикѣ яблокъ?

10-ая. При урожаѣ самъ-шестъ и при посѣвѣ въ 5 четвериковъ на десятину получается соломы 100 пуд. съ каждой десятины; соломы собрано 1 500 пудовъ. Сколько десятинъ засѣяно пшеницею и сколько собрано зерна?

11-ая. На фабрикѣ работали мужчины, женщины и дѣти; число дѣтей втрое меньше числа мужчинъ, а число женщинъ вдвое меньше числа дѣтей; мужчинъ было 42 человѣка; каждый малолѣтній получалъ 45 коп. въ день, каждый мужчина—втрое больше. Сколько получали въ день всѣ женщины вмѣстѣ, если 5 женщинъ получали столько же, сколько получали въ день 3 мужчины?

12-ая. Въ 1882 году въ Россіи было насчитано 48 045 пожаровъ; сумма всѣхъ убытковъ отъ нихъ разсчитана въ 98 112 112 руб.; въ каждые 10 пожаровъ сгорало среднимъ числомъ по 34 строенія. Какова приблизительно средняя стоимость сгорѣвшаго строенія?

13-ая. Сельское общество, состоящее изъ 256 душъ, владѣетъ 340 дес. пахатной земли и 125-ью дес. покосовъ; съ каждой души платится повинностей за десятину пахатной земли по 6 коп., а за десятину луговъ—по 3 коп.; но такъ какъ у крестьянъ земли оказалось мало, то они прикупили пахатной земли столько десятинъ, что на каждую душу съ прежней землей пришлось по двѣ десятины. Сколько прикуплено земли и сколько должно общество платить повинностей послѣ покупки земли?

14-ая. Въ большомъ хозяйствѣ понадобилось 15 дюжинъ тарелокъ, 12 дюжинъ стакановъ и 24 графина; но оказалось, что можно было купить тарелокъ на 21 руб. 60 коп., стакановъ на 10 руб. 56 коп. и графиновъ на 16 руб. 80 коп. Сколько посуды еще надо было прикупить, если дюж. тарелокъ стоитъ 1 руб. 80 коп., дюжина стакановъ 96 коп. и дюжина графиновъ 9 руб. 60 коп.?

15-ая. На фабрикѣ работаютъ мужчины, женщины и дѣти; каждый малолѣтній получаетъ 35 коп. въ день, каждая женщина—65 коп., каждый мужчина 2 руб. 69 коп. Сколько на фабрикѣ работаетъ мужчинъ, сколько женщинъ и сколько малолѣтнихъ, если за недѣлю, состоящую изъ 6-ти рабочихъ дней, мужчинамъ уплачивается 242 руб. 10 коп., женщинамъ—на 164 руб. 10 коп. меньше, чѣмъ мужчинамъ, а малолѣтнимъ — на 52 руб. 80 коп. менѣе, чѣмъ женщинамъ.

35 ящиковъ. Сколько получено прибыли на ящикѣ яблокъ, сколько—на ящикѣ грушъ?

Посѣяна пшеница; соломы всего получилось 1 500 пуд.; каждая десятина дала 100 пуд. соломы; на засѣвъ десятины пошло 5 четвериковъ; урожай былъ самъ-шестъ. Сколько собрано зерна?

На фабрикѣ работали мужчины, женщины и дѣти; мужчинъ было 42 чел.; дѣтей было втрое меньше, чѣмъ мужчинъ; женщинъ было вдвое меньше, чѣмъ дѣтей; каждый малолѣтній получалъ 45 коп.; каждый мужчина—втрое болѣе; 3 мужчины получали столько же, сколько получали 5 женщинъ. Сколько получали всѣ женщины?

Насчитано 48 045 пожаровъ; въ каждые 10 пожаровъ сгорѣло среднимъ числомъ 34 строенія; убытокъ отъ всѣхъ пожаровъ разсчитанъ въ 98 112 112 р. и т. д.

Сельское общество владѣетъ 340 десятинами пахатной земли; съ десятины каждый членъ общества платитъ повинностей по 6 к.; кромѣ того, оно владѣетъ 125-тью десятинами покосовъ, и каждый членъ общества платитъ съ десятины покоса 3 к.; состоитъ это общество изъ 256 человѣкъ; общество прикупило пахатной земли столько, что на душу пришлось съ прежней землей по двѣ десятины. Сколько прикуплено земли и сколько должно общество платить послѣ этого повинностей?

Куплено: нѣсколько дюжинъ тарелокъ по 1 р. 80 к. за дюжину, и истрачено на тарелки 21 р. 60 к.; нѣсколько стакановъ по 96 к. за дюж., и истрачено на стаканы 10 р. 56 к.; нѣсколько графиновъ по 9 р. 60 к. за дюжину, и истрачено 16 р. 80 к.; всего же для хозяйства требуется 15 дюж. тарелокъ, 12 дюж. стакановъ и 24 графина. Спрашивается—сколько еще надо прикупить посуды?

За 6 рабочихъ дней мужчины получили всего 242 р. 10 к., причемъ каждый получалъ за день 2 р. 69 к.; женщины получили за 6 дней на 164 р. 10 к. менѣе, чѣмъ мужчины, причемъ каждая получала въ день 65 к. и т. д.

Остальныя задачи того же нумера либо достаточно приведены, либо же въ приведеніи къ иному расположенію условій не нуждаются. Прорабатывая эти задачи, учитель долженъ исподволь пріучать классъ къ рѣшенію неприведенныхъ (см. § 11 гл. V) сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ. Но отсюда, впрочемъ, отнюдь не слѣдуетъ, что онъ долженъ все время учениковъ вести какъ бы на-помочахъ, т. е. предлагать каждую задачу въ приведенномъ видѣ, напротивъ. Онъ долженъ руководствоваться состояніемъ успѣховъ въ классѣ и принимать во вниманіе интересы также и болѣе способныхъ учениковъ, которымъ (для самостоятельныхъ занятій) должны быть (но, конечно, не всегда) предлагаемы неприведенныя задачи. Вообще учитель долженъ и въ этомъ случаѣ (какъ всегда) руководствоваться своимъ учительскимъ чутьемъ и вкусомъ.

§ 15. Двадцать восьмая ступень можетъ быть *28-ая ст.: дроби.* посвящена измѣненію дробей, преобразованіямъ ихъ и нѣкоторымъ дѣйствіямъ надъ дробями. Сначала разсматриваются дроби съ одинаковыми знаменателями (№ 271), затѣмъ различныя доли, т. е. дроби, у которыхъ числитель единица (№ 272), далѣе—дроби съ одинаковыми числителями (№ 273).—Должно, однако, замѣтить, что цѣль можетъ быть достигнута только тогда, когда учитель, по крайней мѣрѣ, въ началѣ своихъ занятій каждымъ нумеромъ, читаетъ вопросъ вполнѣ выразительно, не безразличнымъ тономъ равнодушія къ вопросу, а напротивъ, съ полнымъ интересомъ къ нему. Учитель долженъ спрашивать: „что больше, три четверти или три восьмыхъ? Что больше, семь десятыхъ или четыре десятыхъ?“ и т. д. (ударенія отмѣчены разгонистой печатью).—Далѣе идетъ сложеніе одинаковыхъ долей единицы (№ 274) и сложеніе дробей съ одинаковыми знаменателями, притомъ изъ числа наиболѣе часто встрѣчающихся въ жизни: четвертей, восьмыхъ, шестнадцатыхъ и т. д. (№ 275). Затѣмъ идетъ сложеніе простѣйшихъ дробей, причемъ стремиться къ усвоенію дѣтьми значенія названій „числитель“ и „знаменатель“ и къ приведенію дробей къ общему знаменателю непремѣнно по правилу не для чего и неразумно. Ученики должны тутъ встрѣчаться только съ дробями простѣйшими, т. е. половинами, четвертями, восьмыми,

шестнадцатыми, въ которыхъ замѣна крупной доли болѣе мелкою вытекаетъ изъ самого способа полученія этихъ долей (№ 276). Потомъ можно обратиться къ подобному же вычитанію дробей (№ 277), къ дѣленію различныхъ долей пополамъ, на три одинаковыхъ части, и т. п. (№ 278) и къ обращенію разныхъ долей въ доли болѣе мелкія (№ 279). Надо при этомъ замѣтить, что только наглядные опыты, какъ со стороны учителя, такъ и со стороны учениковъ, въ дѣйствительномъ раздѣленіи долей на одинаковыя части могутъ повести дѣтей быстро и вѣрно къ тому, чтобы они выработали себѣ вѣрныя представленія о дробяхъ.— Далѣе идетъ исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби (№ 280), увеличеніе и уменьшеніе дроби въ нѣсколько разъ (№ 281), выраженіе дроби въ другихъ доляхъ (№ 282) и нахожденіе части цѣлаго числа (№№ 283—284). Выраженіе двухъ дробей съ разными знаменателями въ одинаковыхъ доляхъ должно вести безъ помощи разложенія знаменателя на первоначальныхъ дѣлителей (каковое разложеніе ученикамъ неизвѣстно), а примѣрно слѣдующимъ образомъ:

Даны дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{9}$. Одну шестую можно обратить въ двѣнадцатыя доли, но девятой въ двѣнадцатыя не обратить; двѣнадцатыя не годятся. Шестую долю можно далѣе обратить въ восемнадцатыя доли (непремѣнно надо переходить отъ однѣхъ долей къ ближайшимъ, не допуская скачковъ!), и девятыя тоже можно обратить въ восемнадцатыя.—Другой примѣръ: даны дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{15}$. Шестыя можно обратить въ двѣнадцатыя, — не годятся! въ восемнадцатыя—не годятся! въ двадцать-четвертыя,—не годятся! въ тридцатыя,—годятся: и пятнадцатыя доли тоже можно обратить въ тридцатыя!—Этотъ пріемъ, и только этотъ пріемъ, приводитъ учениковъ къ пониманію значенія сомножителей знаменателя въ дѣлѣ приведенія дробей къ одному знаменателю.

Нахожденіе части цѣлаго. По возможности просто и наглядно ведя свои уроки, не вдаваясь въ ученіе объ измѣненіяхъ дроби въ зависимости отъ измѣненій числителя и знаменателя и не знакомя дѣтей съ этими именами, можно научить нахожденію части цѣлаго и даже части дроби. Напр., пусть требуется найти $\frac{5}{8}$ одиннадцати. Какъ найти одну восьмую какого-нибудь цѣлаго? (надо это цѣлое раздѣлить на 8 одинаковыхъ частей). Какъ найти одну восьмую одиннадцати? (надо 11 раздѣлить на 8 одинаковыхъ частей). Что получится? (получатся: одна цѣлая единица и еще $\frac{3}{8}$ доли единицы). Эта цѣлая единица вмѣстѣ съ тремя восьмыми долями единицы составляютъ какую часть одиннадцати единицъ? (У насъ было $11 \mid 8 = 1\frac{3}{8}$, стало быть, $1\frac{3}{8}$ составляетъ одну восьмую долю одиннадцати). А намъ надо было найти сколько восьмыхъ долей 11-ти? (Намъ надо было найти $\frac{5}{8}$ одиннадцати). Какъ ихъ найти? (Надо найти сумму: $1\frac{3}{8} + 1\frac{3}{8} + 1\frac{3}{8} + 1\frac{3}{8} + 1\frac{3}{8}$). Сколько получится? И т. д. — Когда дѣти научились находить съ помощью сложенія небольшую часть цѣлаго числа, можно перейти и къ умноженію на цѣлое число. Никакихъ новыхъ и особенныхъ трудностей здѣсь не будетъ, если предыдущее все усвоено. (Самостоятельныя упражненія въ № 284а „Задачника для уч—ковъ“, изд. 2-ое и слѣдующія). Когда ученики освоились съ этимъ взглядомъ, можно показать имъ, что отысканіе пяти осьмыхъ одиннадцати сводится сначала къ отысканію дроби $\frac{11}{8}$, а затѣмъ—къ отысканію дроби $\frac{55}{8}$. (Для самостоятельныхъ работъ въ указанныхъ направленіяхъ и предназначенъ № 284а „Задачника для уч—ковъ“).

Что нахожденіе части цѣлаго иногда называется умноженіемъ на дробь, которая выражаетъ, какую часть требуется найти, смѣло можно въ курсѣ трехгодичной и даже четырехгодичной школы опустить („Ариѳметика для нач. школъ“, §§ 96а и 97б).

Процентъ. Нѣкоторое вниманіе необходимо посвятить выясненію того, что называется процентомъ даннаго числа („Задачникъ для уч—лей, № 285). Опредѣленія и правило процентовъ представляютъ собою лишь тогда болѣе или менѣе затруднительную статью курса ариѳметики, если къ этому ученію приступаютъ съ тѣхъ точекъ зрѣнія, которыя установлены ради приложенія теоріи пропорцій къ рѣшенію задачъ на такъ называемое правило процентовъ, служащее для отысканія процентныхъ денегъ, процентной таксы и т. д. Нынѣ уже лишь весьма немногіе смотрятъ на правило процентовъ съ исключительно торговой точки зрѣнія. Дѣйствительно: ясное опредѣленіе понятія, выражаемаго словомъ „процентъ“, можетъ быть поставлено на слѣдующую точку зрѣнія. Слово „процентъ“ есть не иное что, какъ иностранное слово, обозначающее то же самое, что обозначаютъ два русскихъ слова: „сотая доля“, и процентомъ какого-либо числа называется сотая доля этого числа,—и только. Два процента этого числа то же, что двѣ сотыхъ этого числа, 5% то же, что $^5/_{100}$ этого числа и т. д. Если кто говоритъ, что къ 5% нѣкотораго числа прибавлено 15% того же числа, то въ переводѣ на простой языкъ это для ученика должно выражать только слѣдующее: къ $^5/_{100}$

нѣкотораго числа прибавлено $^{15}/_{100}$ того же числа. Тотъ взглядъ на понятіе процента, по которому послѣдній обозначаетъ либо прибыль, либо убыль, невѣренъ, а потому не можетъ быть признанъ цѣлесообразнымъ въ школѣ. Это тѣмъ болѣе справедливо, что при такомъ взглядѣ непонятно значеніе выраженій: „5 процентовъ умирающихъ“, „2 процента неспособныхъ къ военной службѣ“, „24 процента грамотныхъ“ и т. п. Необходимо, чтобы ученики усвоили себѣ, что 50% какого-либо числа составляютъ половину его, 25% четверть, 75% три четверти, 20% одну пятую долю, и т. д. Нахожденіе нѣсколькихъ процентовъ даннаго числа представляетъ очень легкую задачу на нахожденіе нѣкоторой, вполнѣ опредѣленной, части этого числа. (Подъ № 285а „Задачника для учениковъ“ предложены самостоятельныя упражненія учениковъ въ нахожденіи части числа, а № 286 посвященъ выясненію другого значенія, которое придается слову „процентъ“). Но когда говорятъ, что капиталъ отданъ въ ростъ, напр., по 7% годовыхъ, то такъ говорятъ только для краткости, только для замѣны болѣе многословнаго выраженія. Если хотятъ сказать, что нѣкто отдалъ кому-нибудь нѣкоторое количество денегъ съ тѣмъ, чтобы ему черезъ годъ получить взятое взаймы, да еще $^{7}/_{100}$ долей такого же количества денегъ, какое взято взаймы, то вмѣсто всего этого говорятъ, что первое лицо отдало свои деньги въ долгъ по семи, или изъ семи, процентовъ годовыхъ. Полученный при этомъ избытокъ называется или просто прибылью, или же процентными деньгами, полученными съ даннаго капитала.—При такой постановкѣ вопроса, нахожденіе процентныхъ денегъ съ даннаго капитала для учениковъ представляетъ собою уже работу, далеко не трудную.

Такъ наз. „италіанская практика“.

Когда понятіе процента учениками вполнѣ усвоено, можно обратиться къ т. наз. „италіанской практикѣ“ при рѣшеніи задачъ на вычисленіе процентныхъ денегъ (Ср. конецъ § 15 этой главы). Она приводитъ къ весьма очевиднымъ для учениковъ результатамъ. Пусть предложена задача: „Капиталъ въ 3680 руб. отданъ въ ростъ по $4^{3}/_{4}$ % годовыхъ; сколько онъ принесетъ прибыли въ 2 года 5 мѣсяцевъ?“

Въ годъ по 5%	принесетъ	184 р. — к.	(т. е. 36 р. 80 к. × 5)
„ „ „ $^{1}/_{4}$ %	„	9 р. 20 к.	(т. е. 36 р. 80 к. : 4)
„ „ „ $4^{3}/_{4}$ %	„	174 р. 80 к.	(найдено вычитаніемъ)
„ 2 года	„	349 р. 60 к.	(умноженіемъ на 2)

Въ $^{1}/_{2}$ года	принесетъ	87 р. 40 к.	(дѣленіемъ на 4)
„ $2^{1}/_{2}$ года	„	437 р. — к.	(сложеніемъ)
„ 1 мѣсяцъ	„	14 р. $56^{2}/_{3}$ к.	(дѣлен. 8740 к. на 6)
„ 2 г. 5 м.	„	422 р. $43^{1}/_{3}$ к.	(вычитаніемъ)

Изъ этого вычисленія ясно видны преимущества этого способа предъ обычно употребляемымъ. Примѣняя его, ученики каждое вычисленіе дѣлаютъ не механически, а съ полнымъ разумѣніемъ.

Нахожденіе цѣлаго по части его.

Извѣстное количество упражненій надо посвятить нахожденію цѣлаго по части его. Это ученіе надо поставить на почву совершенно наглядныхъ представленій, напр., такъ (№ 288 „Задачника для учителей“): „Посмотрите на доску: я начерчу прямую черту (прямую линію). Длина этой черты составляетъ $^{1}/_{4}$ длины вотъ этой веревочки; какъ велика длина веревочки?..—Посмотрите на доску: я начерчу другую черту. Она составляетъ ровно $^{3}/_{4}$ длины другой веревочки; какъ узнать длину веревочки? (надо къ тремъ четвертямъ ея прибавить еще одну четверть). А какъ узнать одну четверть? (длину черты раздѣлить на 3 части)... Вотъ я начерчу черту такой длины, что ея длина составитъ $^{5}/_{8}$ длины этой тесемки; какъ узнать длину тесемки? (Надо сперва узнать одну восьмую длины тесемки, а для этого длину черты надо раздѣлить на пять одинаковыхъ частей, а потомъ надо такихъ частей собрать восемь). И т. д.—Важно, чтобы веревочка и тесемка были въ рукахъ у учителя, но не только для провѣрки (для которой учителю заранѣе необходимо намѣтить на доскѣ нужные ему концы), а также для болѣе сильнаго воздѣйствія на воображеніе учениковъ. Конечно, было бы желательно также, чтобы и провѣрка того, что говоритъ и дѣлаетъ учитель, была возможна и чтобы учитель, стало быть, до урока намѣтилъ нужныя ему на доскѣ линіи, а еще лучше—только концы ихъ.

Происхожденіе дроби.

Весьма необходимы упражненія для самостоятельной работы учениковъ надъ усвоенными, подъ руководствомъ учителя, представленіями о дробяхъ (№№ 289а—289з). Особеннаго вниманія заслуживаютъ упражненія (№ 289ж), которыя посвящены способу обозначенія частнаго, происходящаго отъ раздѣленія одного цѣлаго числа на другое, въ видѣ дроби. Для учениковъ не трудно подмѣтить законъ составленія частныхъ, по которому $5 \mid \underline{6} = \frac{5}{6}$, $7 \mid \underline{8} = \frac{7}{8}$, т. е. числителемъ дѣлается дѣлимое, а знаменателемъ—дѣлитель, част-

нымъ же отъ требуемаго дѣленія дѣлается дробь съ этимъ числителемъ и знаменателемъ. Но тѣмъ важнѣе для учителя обратить свое вниманіе на то, что самый смыслъ этого частнаго для учениковъ далеко не такъ простъ, какъ это кажется людямъ взрослымъ. Дѣло въ томъ, что когда я хочу раздѣлить 7 булокъ между 8 мальчиками, то я могу поступить слѣдующимъ образомъ: а) раздѣлить 1 булку на 8 одинаковыхъ частей, раздать эти части всѣмъ 8-ми мальчикамъ, поступить точно такъ же со второй булкой, съ третьей, съ четвертой и т. д. до седьмой включительно; я тогда достигну того, что у всѣхъ мальчиковъ будетъ одинаковое количество хлѣба, но при этомъ у каждаго будетъ 7 одинаковыхъ долей, взятыхъ отъ различныхъ булокъ,—и я только потому говорю, что у всѣхъ хлѣба поровну, что восьмая доля одной булки то же самое, что восьмая доля другой. Именно въ этомъ смыслѣ ученикъ и долженъ сначала понимать запись $7 \mid 8 = \frac{7}{8}$. б) Раздачу булокъ я, однако-же, могъ бы совершить иначе: отрѣзавъ отъ одной изъ нихъ восьмую ея долю, я остальное отдаю одному мальчику, отрѣзавъ отъ другой булки также восьмую ея долю, я отдаю остальное другому мальчику, и такъ я поступаю со всѣми 7-ью булками; тогда у меня будетъ отдана нѣкоторая часть каждой булки только каждому изъ семи мальчиковъ, восьмому же я покуда еще ничего не далъ, и ему я поэтому отдамъ оставшіяся у меня 7 долей, отрѣзанныхъ отъ разныхъ булокъ.—Опытъ показываетъ, что ученики только потому затрудняются, что они всего этого не знаютъ.

Если бы у меня были не булки, а, напр., полоса бумаги въ 7 арш. длиной, и я хотѣлъ бы раздѣлить эту полосу на 8 одинаковыхъ частей, то я отъ такого раздѣленія, конечно, получилъ бы нѣкоторыя части полосы, изъ которыхъ каждая имѣетъ въ длину $\frac{7}{8}$ арш. Но добраться до этого вывода можно опять-таки тѣмъ или другимъ изъ двухъ выше приведенныхъ способовъ дѣленія. Такіе грубо-наглядные примѣры приведены здѣсь преимущественно съ тою цѣлью, чтобы учитель самъ ясно увидѣлъ, въ чемъ именно заключается внутренняя трудность вопроса, занимающаго насъ (№ 289ж „Задачника для учениковъ“), и на какомъ пути можно съ пользою для дѣла преодолѣть съ учениками эту внутреннюю трудность. Здѣсь нечего бояться большой потери времени. Время, потраченное на образованіе въ умѣ учениковъ вѣрныхъ представленій, никогда не оказывается потеряннымъ, и торопиться въ этомъ дѣлѣ какъ-разъ не разсудительно. А потому

на содержаніе этого вопроса и на пріемы его рѣшенія учителю надо обратить свое особенное вниманіе.

Простое тройное правило.

§ 15. Въ основѣ современнаго взгляда на внутренній порядокъ и связь различныхъ ученій ариѳметики лежитъ стремленіе къ объединенію и методическому соединенію во-едино тѣхъ ученій, которыя, если можно такъ выразиться, тяготѣютъ къ одному и тому же центру. Въ виду этого, ученія о простомъ тройномъ правилѣ и даже о сложномъ примыкаютъ тѣсно къ содержанію занимающей насъ 28-й ступени обученія. Въ самомъ дѣлѣ, къ чему сводится рѣшеніе задачъ на простое и сложное тройныя правила? Только къ нахожденію части какого-либо числа (цѣлаго или дробнаго) или же цѣлаго по данной части его, если смотрѣть на задачи этого рода съ точки зрѣнія способа такъ называемаго „приведенія къ единицѣ“. (Поэтому № 189и „Задачника для уч—лей“ и №№ 289і, 289к „Задачника для уч—ковъ“ посвящены простому тройному правилу. Сложному же тройному правилу посвящены №№ 289л, 289м.) Прежде всего обратимся къ простому тройному правилу для случая, когда въ задачѣ даны двѣ прямо-пропорціональныя (состоящія въ прямомъ отношеніи) величины. Пусть предложена задача:

5 аршинъ сукна стоитъ 23 р. 85 коп.; что стоитъ 8 арш. того же сукна?—Сначала пусть дѣти рѣшаютъ ее такъ:

I) $2385 : 5 = 477$; столько-то коп. стоитъ 1 арш.

II) $477 \times 8 = 3816$; столько-то коп. стоятъ 8 арш.

Отвѣтъ: 38 р. 16 коп.

Когда такихъ (для того подходящихъ) задачъ разрѣшено нѣсколько, можно перейти къ рѣшенію задачи, которая потребуетъ большихъ вычисленій, напр., къ рѣшенію такой задачи: 216 ф. масла обошлись торговцу въ 71 р. 64 к.; онъ желаетъ уступить другому 1 п. 35 ф. этого масла въ свою цѣну. Сколько онъ получитъ за это количество масла?—Рѣшеніе этой задачи можетъ быть слѣдующее:

I) 1 п. 35 ф. = 75 ф.

II) $7164 : 216 = 33\frac{36}{216} = 33\frac{9}{54} = 33\frac{1}{6}$

648

684

648

36

III) $33\frac{1}{6} \times 75 = 2487\frac{1}{2}$

3300

$-\ 825$

$2475 + 12\frac{1}{2}$

Отвѣтъ: 24 р. $87\frac{1}{2}$ коп.

Но при этомъ вычисленій сдѣлано очень много!.. — Нельзя ли это сдѣлать покороче?..—Можно: 216 ф. стоитъ 7164 коп.; одинъ фунтъ стоитъ въ 216 разъ меньше, чѣмъ 216 фунтовъ, т. е. стоитъ:

$\frac{7164}{216}$ копейки;

а 75 фунтовъ стоятъ въ 75 разъ больше, чѣмъ одинъ фунтъ, т. е. стоятъ:

$\frac{7164 \times 75}{216}$ коп.; сокративъ, получимъ слѣдующую запись (въ которой ничего не надо перечеркивать):

$$\frac{\begin{matrix}199\\1791\quad 25\\7164 \times 75\end{matrix}}{\begin{matrix}216\\54\\18\\2\end{matrix}} = \frac{4975}{2} = 2487\tfrac{1}{2}.$$

Очевидно, что хотя этотъ способъ рѣшенія и быстрѣе ведетъ къ цѣли, но требуетъ такого пониманія сокращенія дробей, котораго нельзя ожидать отъ ученика начальной одноклассной школы. Трудности сводятся къ слѣдующему: а) къ обозначенію частнаго въ видѣ дроби (№№ 289ж и 289з), б) къ увеличенію дроби въ нѣсколько разъ (289г), и г) къ сокращенію дробей. На преодолѣніе каждой изъ этихъ трудностей въ отдѣльности должна быть направлена работа учителя. Только послѣ устраненія этихъ трехъ препятствій можно ученику перейти къ рѣшенію соотвѣтствующихъ задачъ (№№ 289і и 289к). Для устраненія этихъ трудностей можно держаться слѣдующаго порядка предварительныхъ упражненій (особенно въ 4-ый годъ обученія):

Уменьшеніе числа и увеличеніе результата.

Пусть требуется сначала 8 уменьшить въ 6 разъ, а полученное увеличить въ 9 разъ, — какъ это записать? (Слѣдующимъ образомъ:

$$8 : 6 = \frac{8}{6} = \tfrac{4}{3};\ \frac{4}{3} \times 9 = \frac{4 \times 9}{3} = 12).$$

— Это очень долго!..—Можно ли сразу написать хоть то, что получится отъ уменьшенія 8-ми единицъ въ шесть разъ? (Можно! слѣдуетъ вспомнить, что получится дробь $\frac{8}{6}$)... — Уменьшить 18 въ 4 раза! (Запишемъ дробь $\frac{18}{4}$)...— И т. п.—Чтобы уменьшить данное цѣлое число въ нѣсколько разъ, можно записать данное число, эту запись подчеркнуть (знакъ дроби!), а подъ чертою подписать, во сколько разъ надо число уменьшить!..—Уменьшить 9 въ шесть разъ! $(\frac{9}{6})$.—Уменьшить 15 въ 9 разъ? $(\frac{15}{6})$. И т. д... — Сначала уменьшить 15 въ 9 разъ, а полученное увеличить въ 4 раза! (Отвѣтъ:

$\frac{15}{9} \times 4 = \frac{15 \times 4}{9}$; ибо, чтобы увеличить дробь въ 4 раза, мы возьмемъ въ четыре раза болѣе долей!)...

— Сначала 30 уменьшить въ 20 разъ, а полученное увеличить въ 10 разъ! (Отвѣтъ:

$$\frac{30}{20} \times 10 = \frac{30 \times 10}{20})...$$

— И т. д.—Но это тоже можетъ быть сокращено!..—Если сначала требуется данное число уменьшить въ нѣсколько разъ, а потомъ полученное увеличить въ какое-нибудь другое число разъ, то это можно записать такъ: записать данное число, подъ нимъ провести черту (знакъ дроби), подъ чертою записать то число, которое выражаетъ—во сколько разъ надо уменьшить данное число, а надъ чертою, въ числителѣ, знакъ умноженія и число, которое выражаетъ, во сколько разъ надо полученную дробь увеличить...—Уменьшить 8 въ 6 разъ, а полученное увеличить въ 9 разъ! (Отвѣтъ:

$$\frac{8 \times 9}{6} = 12)...$$—И т. п.

Что касается сокращенія дробей, въ которыхъ числитель состоитъ изъ сомножителей, то къ сокращенію до производства умноженія (напр., въ только-что приведенномъ отвѣтѣ можно, не производя умноженія, раздѣлить 9 и 6 на 3) можно подойти слѣдующимъ, нѣсколько утомительнымъ, но все-таки довольно вѣрнымъ путемъ:

Умножить $\frac{7}{20}$ на 15!...—Это требованіе можно записать такъ:

$$\frac{7}{20} \times 15 = \frac{7 \times 15}{20} \ldots$$

—Почему? (Потому что мы должны дробь увеличить въ 15 разъ и для этого мы возьмемъ въ 15 разъ болѣе долей, чѣмъ сколько ихъ въ дроби $\frac{7}{20}$)...—Но прежде чѣмъ умножить 7 на 15 можно разсудить такъ: произведеніе 7×15 дѣлимое...—Почему? (Потому что числитель дроби всегда можно разсматривать, какъ дѣлимое, а знаменателя — какъ дѣлителя, и тогда дробь является частнымъ)...—Итакъ, въ дроби

$$\frac{7 \times 15}{20}$$

произведеніе 7×15—дѣлимое, а 20 — дѣлитель...— Дѣлимое и дѣлителя можно раздѣлить на одно и то же число...— Дѣлитель дѣлится на 5 на-цѣло безъ остатка... Въ дѣлимомъ (7×15) число 7 — множимое, а 15 — множитель...— Это произведеніе (7×15) надо уменьшить въ 5 разъ (потому что дѣлителя мы желаемъ уменьшить въ 5 разъ)... — Если мы множителя, т. е. число 15, въ нашемъ дѣлимомъ уменьшимъ въ 5 разъ, то произведеніе именно и уменьшится въ 5 разъ...—Еще разъ!..—Повторите...—А потому

$$\frac{7}{20} \times 15 = \frac{7 \times 15}{20} = \frac{7 \times 3}{4} \ldots$$

—Мы одного изъ сомножителей числа раздѣлили на 5. И т. д.— Названія „числитель“ и „знаменатель“, когда ученики уже много работали надъ дробями, затрудненія не представятъ.

Дробное число рабочихъ. Нѣкоторыя неудобства могутъ встрѣтиться, когда въ промежуточномъ вычисленіи или въ отвѣтѣ появляется дробное число рабочихъ, дробное число дней и т. п.

Пусть, напр., предложена задача *): „Для того, чтобы вырыть ровъ извѣстной ширины и глубины длиною въ 27 аршинъ, въ теченіе извѣстнаго промежутка времени, необходимо 33 работника; сколько землекоповъ понадобится для вырытія рва въ 45 саженъ, если всѣ прочія условія одинаковы?“—Что это значитъ: „всѣ прочія условія одинаковы“? (Это значитъ, что ширина та же, глубина—та же, что рабочіе такіе же ловкіе и прилежные, что грунтъ такой же, такія же лопаты и т. д.,—все то одинаково, отъ чего зависитъ успѣшность работы, все то одинаково, что составляетъ какое-либо условіе для работы, какое-либо обстоятельство, которое вліяетъ на работу)...—Повторите задачу и запишите:

27 саж. 33 раб.
45 „ 1 „

—Теперь разсуждайте: чтобы вырыть ровъ въ 27 саж., нужно 33 раб.; а для вырытія рва въ одну сажень работниковъ надо меньше 33-хъ въ 27 разъ, т. е. нужно $\frac{33}{27}$ работника...— Но что это значитъ: „тридцать три двадцать седьмыхъ доли“ одного работника?...— Какъ это понимать? вѣдь работника нельзя дѣлить на части!... — $\frac{3}{4}$ работника, $\frac{5}{7}$ работника, $1\frac{2}{6}$ работника, $\frac{33}{27}$ доля работника—это нелѣпость, если это понимать такъ, какъ оно сказано, буквально...—Это надо понимать такъ: если сказано, что для исполненія какого-либо дѣла надобно $\frac{3}{4}$ работника, то это можетъ означать только то, что для исполненія этого дѣла нужны $\frac{3}{4}$ той работы, которую выполняетъ одинъ работникъ...— Что это значитъ: для вырытія рва длиною въ одну сажень нужно $\frac{33}{27}$ доли работника? (Это значитъ, что для вырытія рва длиною въ одну сажень нужны $\frac{33}{27}$ работы одного работника)...—И т. п.— Вернемся къ задачѣ: для вырытія рва въ 27 саженъ длиною нужны $\frac{33}{27}$ работы одного работника, а для вырытія рва въ 45 саженъ нужно употребить работу въ 45 разъ большую, т. е.

$$\frac{\overset{11}{\cancel{33}} \times \overset{5}{\cancel{45}}}{\underset{9}{\cancel{27}}} = 55,$$
$$1$$

*) Кстати здѣсь приведены также пріемы выясненія другихъ понятій, часто встрѣчающихся при рѣшеніи задачъ на тройное правило.

т. е. работу, въ 55 разъ большую, чѣмъ работа одного работника, говоря иначе: работу 55-ти работниковъ...

Пропорціональность величинъ. Самое рѣшеніе задачъ на тройное правило, въ которыхъ встрѣчается величина, обратно-пропорціональная искомому въ задачѣ значенію другой величины, новыхъ ариѳметическихъ трудностей не представляетъ. Но для выясненія этого весьма важнаго представленія, не дающагося ученикамъ безъ нѣкотораго труда, надо предварительно разрѣшить нѣсколько задачъ этого рода, и когда уже это сдѣлано, можно перейти къ упражненіямъ слѣдующаго, примѣрно, содержанія.—Стоимость извѣстнаго количества товара и самое количество его—двѣ величины, изъ которыхъ первая зависитъ отъ второй: съ увеличеніемъ количества товара стоимость этого количества тоже увеличивается... — Стоимость извѣстнаго количества товара зависитъ отъ этого количества слѣдующимъ образомъ: съ увеличеніемъ количества товара и стоимость его увеличивается во столько же разъ...—Количество работы и количество работниковъ, исполняющихъ ее...?—Количество работы и время, потраченное на ея выполненіе...?—Если съ увеличеніемъ одной величины, другая увеличивается во столько же разъ, то говорятъ, что онѣ находятся въ прямомъ одна къ другой отношеніи (или что онѣ прямо пропорціональны одна другой)...—Величина произведенія двухъ чиселъ находится въ прямомъ отношеніи къ каждому изъ нихъ... — Величина дроби въ какомъ отношеніи находится къ величинѣ числителя?... — Длина пути, пройденнаго человѣкомъ, идущимъ ровнымъ шагомъ (равномѣрно), прямо-пропорціональна времени, въ теченіе котораго онъ двигался...—Пересмотрите такія-то задачи (№№ 289і и 289к), есть ли тамъ прямо-пропорціональныя величины?.. — Назовите величины, какія встрѣчаются въ этихъ задачахъ! (Количество ткани и стоимость этого количества и т. д.)...—Посмотрите задачи № 289к...—Съ увеличеніемъ одной изъ величинъ (количества рабочихъ), другая (количество времени, употребляемое на работу) — уменьшается... притомъ во столько же разъ!...—Если съ увеличеніемъ одной величины другая уменьшится во столько же разъ или обратно: съ уменьшеніемъ увеличивается, то такія величины называются обратно-пропорціональными..." (Иностранное слово „пропорціональный" можно замѣнить болѣе простымъ описательнымъ выраженіемъ: „измѣняется въ такомъ же отношеніи"). Необходимы также упражненія учениковъ въ придумываніи величинъ, прямо и обратно пропорціональныхъ.

Другіе способы вычисленія, при которыхъ такъ называемое „приведеніе къ единицѣ" не всегда обязательно, весьма многочисленны, разнообразны и въ иностранной методической литературѣ извѣстны подъ именемъ „италіанской практики".—Такъ, напр., пусть предложена задача: „15 арш. сукна стоятъ 63 р. 75 коп.; что стоятъ 24 арш. того же сукна?" Ее можно разрѣшить съ помощью слѣдующихъ вычисленій:

Такъ называемая италіанская практика.

	15 арш.	стоятъ	63 р. 75 к.	
	30 арш.	„	127 р. 50 к.	
	6 арш.	„	25 р. 50 к.	(въ 5 разъ меньше, чѣмъ 30 арш.),
откуда	24 арш.	„	102 р.	(вычтя стоимость 6-ти аршинъ изъ стоимости 30-ти арш.),

или такъ:

	15 арш.	стоятъ	63 р. 75 к.	
	5 арш.	„	21 р. 25 к.	
	1 арш.	„	4 р. 25 к.	(въ 5 разъ меньше, чѣмъ 5 арш.).
	3 арш.	„	12 р. 75 к.	
откуда	24 арш.	„	102 р. — к.	(сложивъ стоимость 15-ти, 5-ти, 1-го и 3-хъ арш.),

или же такъ:

	15 арш.	стоятъ	63 р. 75 к.	
	3 арш.	„	12 р. 75 к.	(въ 5 разъ меньше)
	6 арш.	„	25 р. 50 к.	(въ 2 раза больше, чѣмъ 3 арш.).
откуда	24 арш.	„	102 р.	(сложивъ стоимость 15-ти, 3-хъ и 6-ти арш).

Сложное тройное правило.

§ 16. Сложное тройное правило должно ставить на ту методическую точку зрѣнія, по которой даже и на высшихъ ступеняхъ обученія надо преодолѣвать въ данную минуту только по одной трудности за-разъ. Поэтому начать надо дѣло съ задачъ съ тремя условіями (не считая условій во-

проса), въ которыя не входятъ обратно-пропорціональныя величины. Вести его можно не только съ помощью соотвѣтствующихъ задачъ (изъ 1-го выпуска „Задачника для учителей“), а также слѣдующимъ, примѣрно, образомъ (ср. „Задачникъ для учителей“, выпускъ II-ой, № 411 и слѣдующіе). Легко ли разрѣшить слѣдующую задачу: 17 аршинъ ситцу стоятъ 2 руб. 89 коп.; что стоятъ 15 аршинъ такого же ситцу? (Легко)... — Ну, а если спросить—что стоятъ 15 аршинъ ситцу того же качества, и вдвое большей ширины? (Можно разсчитать!) — Ширина ситца—новое условіе, отъ котораго зависитъ стоимость извѣстнаго количества его...—Переписчикъ въ теченіе 4-хъ дней можетъ переписать 40 листовъ; во сколько дней онъ перепишетъ 60 листовъ?...—Легко ли или трудно рѣшить эту задачу? (Легко)... — А если добавить два новыхъ условія: сорокъ листовъ онъ переписывалъ въ 4 дня, работая по десяти часовъ въ день, а шестьдесятъ листовъ онъ долженъ переписать, работая по двѣнадцати часовъ въ день?.. (Это придется разсчитать на основаніи новаго условія)... — Сосчитаемъ—сколько условій въ этой задачѣ! 1-ое: переписчикъ работаетъ 4 дня; 2-ое: онъ при этомъ за все время переписываетъ 40 листовъ; 3-ье: работаетъ онъ по 10 часовъ въ день; 4-ое: надо переписать 69 листовъ; 5-ое: работать ежедневно долженъ переписчикъ по 12-ти часовъ...— Одни условія утвердительныя (первыя три), остальныя же два относятся прямо къ вопросу...

Истинное значеніе задачъ на сложное тройное правило.

Истинное значеніе рѣшенія учениками задачъ не такъ наз. сложное тройное правило не такъ велико, какъ кажется. Главная цѣль—выясненіе вліянія условій на рѣшеніе вопроса—достинута раньше. Практическаго же значенія задачи этого рода не имѣютъ. Поэтому слѣдуетъ ограничиваться задачами съ тремя, много—четырьмя величинами. Умѣстнѣе рѣшеніе задачъ этого рода въ 4-ый, а не въ 3-ій, годъ обученія въ начальной школѣ.

Записи рѣшеній.

Способы расположенія вычисленій могутъ быть слѣдующаго вида (задача гласитъ такъ: „партія землекоповъ въ 26 человѣкъ, работающихъ машинами, можетъ вырыть каналъ въ 45 саженъ длины, 9 саж. ширины и 4 сажени глубины въ теченіе 40 дней, работая по 12 часовъ въ день; какой длины каналъ могутъ вырыть 39 землекоповъ, если ширина канала должна быть 5 саженъ, а глубина 9 саженъ, работая въ теченіе 80 дней по 10 часовъ въ день?“):

26	ч. 40	дн. 12	ч. 9	с. ш. 4	с. гл. 45 саж. дл.
1	»	»	»	»	$\frac{45}{26}$
39	»	»	»	»	$\frac{45\times39}{26}$
39	1	»	»	»	$\frac{45\times39}{26\times40}$
39	80	»	»	»	$\frac{45\times39\times80}{26\times40}$
39	80	1	»	»	$\frac{45\times39\times80}{26\times40\times12}$
39	80	10	»	»	$\frac{45\times39\times80\times10}{26\times40\times12}$
39	80	10	1	»	$\frac{45\times39\times80\times10\times9}{26\times40\times12}$
39	80	10	5	»	$\frac{45\times39\times80\times10\times9}{26\times40\times12\times5}$
39	80	10	5	1	$\frac{45\times39\times80\times10\times9\times4}{26\times40\times12\times5}$
39	80	10	5	9	$\frac{45\times39\times80\times10\times9\times4}{26\times40\times12\times5\times9}$

Если учитель считаетъ, что ему съ учениками надо разрѣшить побольше задачъ на сложное тройное правило, и не желаетъ для этого брать задачи изъ задачника, то онъ легко можетъ составить и самъ весьма много задачъ, положивъ въ основу каждой изъ нихъ уже рѣшенную задачу. Для этого надо только исключить одно изъ извѣстныхъ въ задачѣ чиселъ и подставить вмѣсто неизвѣстнаго отвѣтъ задачи.—Упражненія въ записи, подобной выше намѣченной, могутъ быть сокращены въ томъ смыслѣ, чтобы искомый отвѣтъ развивался изъ второй строчки, не требуя десяти отдѣльныхъ записей, а только одной, постепенно измѣняющейся. Самое упражненіе въ подобныхъ запискахъ, по меньшей мѣрѣ, столь же полезно, какъ и рѣшеніе задачъ. Упражненія этого рода уясняютъ ходъ мысли. Въ концѣ-концовъ получится такая запись, которую ученикъ долженъ раньше всего сознательно изготовить:

б)	26	чел.	40	дн.	12	ч.	9	саж.	ш.	4	с. глуб. 45 саж. дл.
	1		»		»		»			»	
	39		»		»		»			»	
	39		1		»		»			»	
	39		80		»		»			»	
	39		80		1		»			»	
	39		80		10		»			»	
	39		80		10		1			»	
	39		80		10		5			»	
	39		80		10		5			1	
	39		80		10		5			9	

Когда все это записано, притомъ записано не молча, а съ изложеніемъ записываемаго, ученикъ подъ послѣднею записью проводитъ черту и начинаетъ, переходя отъ верхней строчки къ слѣдующей, отъ второй къ третьей и т. д. до послѣдней включительно, составлять отвѣтъ, приводящій въ концѣ-концовъ къ записи:

$$\frac{\overset{1}{45} \times \overset{3}{39} \times \overset{2}{80} \times \overset{2}{10} \times \overset{1}{9} \times \overset{1}{4}}{\underset{2}{26} \times \underset{1}{40} \times \underset{3}{12} \times \underset{1}{5} \times \underset{1}{9}} = 90.$$

Только послѣ упражненій этого рода съ записями и изустными, хотя бы и краткими, описаніями записаннаго, ученики вполнѣ овладѣваютъ способомъ рѣшенія задачъ на сложное тройное правило. Промедленія, которыя потребуются на эту предварительную работу, окупятся быстротою и вѣрностью рѣшенія учениками задачъ этого рода впослѣдствіи. Поспѣшность же въ привитіи имъ не вполнѣ понятаго ими пріема, наоборотъ, ведетъ къ тому, что ученики всегда будутъ крайне неохотно и медленно, а подчасъ и прямо невѣрно, рѣшать задачи этого рода.

29-ая ступень: площади и объемы.

§ 17. Двадцать девятая ступень посвящена вычисленію площадей квадратовъ и вообще прямоугольниковъ. На ней естественно появляется необходимость привлечь дѣтей къ выработкѣ вѣрныхъ представленій чисто-геометрическаго содержанія. Это можетъ быть сдѣлано въ срокъ болѣе или менѣе короткій, при нѣкоторомъ вниманіи къ слѣдующимъ соображеніямъ. Геометрія въ объемѣ среднеобразовательнаго курса представляетъ собою учебный предметъ, требующій отъ школы для своего прохожденія очень много времени, а отъ учащагося—болѣе или менѣе обширнаго умственнаго развитія. Уже одно то, что въ подобномъ курсѣ геометріи должно пріучить ученика къ чуждой этому послѣднему мысли о необходимости доказывать всякую истину,—если она только не принадлежитъ къ числу немногочисленныхъ истинъ, не требующихъ и не допускающихъ доказательства, т. е. къ числу аксіомъ,—ужъ одно это обстоятельство представляетъ собою такую внутреннюю особенность средне-образовательнаго курса геометріи, которая является источникомъ множества значительныхъ трудностей. Далѣе, не менѣе трудностей представляетъ собою стремленіе геометріи къ опредѣленію почти всѣхъ понятій, лежащихъ въ ея основѣ, хотя бы эти понятія, съ точки зрѣнія дѣтскаго смысла, и не особенно нуждались въ опредѣленіяхъ. Само собою разумѣется поэтому, что тѣ немногія ученія геометріи, которыя подлежатъ усвоенію въ начальной школѣ, въ ней **не должны и не могутъ быть** проработаны въ томъ же духѣ, въ какомъ они изложены въ руководствахъ и учебникахъ по этому предмету. Цѣль сообщенія учащимся въ начальной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ нѣкоторыхъ познаній по предмету геометріи можетъ заключаться: 1) въ ознакомленіи ихъ съ нѣкоторыми геометрическими названіями, которыя часто употребляются въ ремеслахъ и въ жизни (уголъ, квадратъ, параллельный, перпендикулярный, и т. п.), а также 2) въ ознакомленіи съ измѣреніемъ нѣкоторыхъ геометрическихъ протяженій: прямыхъ линій, разныхъ угловъ, окружности, и площадей: прямоугольника, параллелограма, прямолинейнаго треугольника, а также объемовъ куба и вообще прямоугольнаго параллелепипеда. Тѣ ученія, которыя дѣтямъ не могутъ быть разъяснены, должны быть опущены или же приняты ими на-вѣру. Ими принимаются на-вѣру нѣкоторые взгляды и ученія изъ другихъ областей знанія, сообщаемые имъ на другихъ урокахъ. Вообще отъ принятія учениками на-вѣру нѣкоторыхъ знаній вреда нѣтъ, если только необходимость и смыслъ ихъ сознаны учащимися и если они, при этомъ, пріучены понимать различіе между знаніемъ, принятымъ на-вѣру, и знаніемъ, провѣрка котораго доступна ихъ уму.

Характеръ выработки геом. представленій.

Указанною выше цѣлью обусловливается и характеръ выработки учащимися геометрическихъ представленій. Эта выработка должна отличаться прежде всего полною осязательностью, наглядностью и ясностью. Къ наглядным пособіямъ и чертежу надо прибѣгать съ толкомъ, притомъ часто,—вотъ правило, котораго не долженъ забывать учитель, если онъ не же-

лаетъ впасть въ крайность излишняго словоговоренія. Притомъ начинать дѣло съ тѣлъ и уже отъ нихъ переходить къ поверхностямъ и линіямъ нѣтъ особенной необходимости. Начать можно съ черченія прямой линіи. Не безпокойтесь при этомъ, что ученики будутъ приписывать ей толщину и ширину,—это они будутъ дѣлать только сначала. Они и сами очень скоро поймутъ, что когда говорятъ о прямой, то при этомъ вовсе не имѣютъ въ виду ни толщины, ни ширины ея.

Сообразно съ симъ можно повести, вовсе не задумываясь надъ опредѣленіями точки, прямой линіи, угла и т. п., упражненія въ слѣдующемъ родѣ:

Предварительныя геометрическія упражненія.

Вотъ точка; проведемъ изъ нея на доскѣ прямую...— Можно ли отъ руки? (Можно)...— Но можно и съ помощью линейки...— Что мы провели? (Прямую).— Откуда? (Изъ точки).—Въ какомъ направленіи? (Вотъ въ этомъ!..*). —Много ли можно изъ точки провести прямыхъ? (Сколько угодно).—Вотъ прямая линія... А это—не прямая...—Это—тоже линія, но не прямая!.. и т. д. (Ученики должны, конечно, и сами поупражняться въ проведеніи прямыхъ линій въ разныхъ направленіяхъ на доскѣ, на полу, въ тетради).

Проведу прямую изъ точки...— Что я сдѣлалъ?..— Проведу изъ той же точки еще одну прямую въ направленіи прямо-противоположномъ...— Гдѣ направленіе прямо-противоположное?.. (Всѣ, безъ исключенія, ученики должны поупражняться въ изображеніи прямыхъ и въ продолженіи прямыхъ въ ту же и въ прямо-противоположную сторону). Проведу прямую изъ точки... Проведу другую прямую, въ другомъ направленіи, но не въ прямо-противоположномъ...— Что получилось?...— Получился уголъ...—Начертите уголъ!...—Еще уголъ!...—Гдѣ вершина угла?— Гдѣ стороны его?...— Кто знаетъ?...— Начертимъ уголъ!...— Еще одинъ!...— Вырѣжемъ изъ бумаги такой же уголъ, какъ второй!...—На длину сторонъ не смотрите,—уголъ все тотъ же, хотя бы стороны его были меньше сторонъ этого угла...— Вотъ уголки изъ бумаги—одинаковые, хоть у нихъ стороны и разныя...—Это—углы равные между собою...—Этотъ уголъ равенъ тому...— Вотъ уголъ!— Начертимъ еще одинъ!...—Вырѣжемъ изъ бумаги уголъ, равный второму...— Вотъ первая сторона (нижняя) перваго угла, вотъ вторая сторона перваго угла...—Гдѣ первая сторона второго, гдѣ вторая сторона второго угла?..— Приложимъ первую сторону вотъ этого (вырѣзаннаго изъ бумаги) угла ко второй сторонѣ перваго, вершину угла (вырѣзаннаго изъ бумаги) на вершину, а весь уголъ на доску...— Проведемъ по второй сторонѣ (бумажнаго) угла мѣломъ прямую...— Получимъ новый (четвертый) уголъ, который состоитъ изъ двухъ угловъ...— Мы сложили два угла...—Мы получили сумму двухъ угловъ...—Въ этомъ новомъ углѣ гдѣ первая сторона, гдѣ вторая?...—Какой уголъ образуютъ

*) Ученикъ долженъ показать рукою—въ какомъ направленіи проведена прямая.

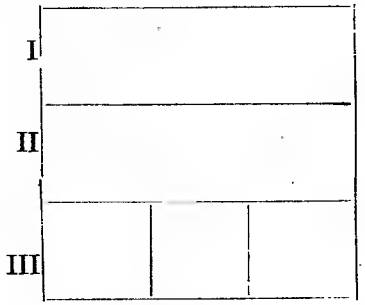
эти двѣ стороны?...— Какіе тутъ углы равны между собою? (Первый и третій).—Вотъ два угла *).— Сложимъ ихъ...— Что получимъ? (Не получимъ угла)...—Вторая сторона второго угла и первая перваго образуютъ ли уголъ? (Нѣтъ, не образуютъ)...—Что же онѣ составляютъ? (Онѣ составляютъ одну прямую, одну прямую линію)...— Такіе два угла называются прямыми углами, и каждый изъ этихъ угловъ называется тоже прямымъ угломъ!.. — Сложить слѣдующіе два угла!— Найти сумму вотъ такихъ двухъ угловъ!..— Прибавить вотъ этотъ уголъ къ слѣдующему!.. И т. д.

Надо поупражнять дѣтей въ сложеніи не только одинаковыхъ, а также различныхъ угловъ. Потомъ могутъ итти такія упражненія: возьмемъ прямую (прямую линію!) и на ней точку...—Изъ этой точки проведемъ на доскѣ еще прямую...—Сколько получилось угловъ? (Два)...— Можно ли провести изъ точки на прямой такую прямую, чтобы оба угла были равны между собою?..—Проведемъ...—Получимъ прямые углы... (Каждое многоточіе предполагаетъ многочисленныя упражненія).

Когда получимъ два прямыхъ угла?— Два прямыхъ угла можно получить, если изъ точки на прямой проведемъ другую прямую такъ, чтобы оба угла, которые при этомъ получатся, были одинаковы...— Проведите прямые углы...—Изъ куска бумаги вырѣжемъ два прямыхъ угла...—Разорвемъ бумажку такъ, чтобы получились прямые углы (сложимъ кусокъ бумаги сначала, какъ слѣдуетъ)...— Начертите одинъ прямой уголъ...— Любая сторона прямого угла,—такъ говорятъ,—перпендикулярна къ другой сторонѣ...—Говорятъ: „перпендикуляръ“ къ другой сторонѣ... —Вотъ прямая, а вотъ точка на ней...—Проведемъ изъ этой точки перпендикуляръ къ этой прямой...— Проведите перпендикуляры къ слѣдующимъ прямымъ, изъ слѣдующихъ точекъ (вверхъ, вбокъ, внизъ, влѣво, вправо!)...—Проведемъ прямой уголъ: отъ вершины его отложимъ на каждой сторонѣ одинаковыя прямыя (одинаковые куски, отрѣзки прямыхъ линій)...—Вершина прямого угла—начало обоихъ отрѣзковъ...— А гдѣ концы этихъ отрѣзковъ?...—Изъ конца одного отрѣзка проведемъ перпендикуляръ къ этому вверхъ... — Получимъ ленту, полосу... — Изъ конца другого отрѣзка проведемъ перпендикуляръ къ этому отрѣзку... — Получимъ кусокъ ленты, кусокъ полосы... — Это — четыреугольникъ... Почему? (Потому, что здѣсь четыре угла)... — Это прямоугольный четыреугольникъ... — Почему? (Потому что всѣ четыре угла — прямые углы)... — Но въ этомъ прямоугольномъ четыреугольникѣ, очевидно, всѣ четыре стороны равны между собою... — Такой четыреугольникъ называется квадратомъ... — Начертимъ квадратъ, въ которомъ каждая изъ четырехъ сторонъ имѣетъ въ длину вершокъ...—Площадь такого квадрата называется квадратнымъ вершкомъ...—Какъ начертить квадратъ, площадь котораго—одинъ квадратный аршинъ?..— Какъ начертить квадратъ, площадь котораго—квадратная сажень?... И т. д.

Сколько кв. аршинъ въ кв. сажени? — Сколько кв. сажень въ кв. верстѣ? И т. д.—Почему 1 кв. саж. = 3 кв. арш. × 3 = 9 кв. арш.?

*) Надо взять два прямыхъ угла, оторванные отъ осьмушки бумаги!



Потому что въ квадратѣ, котораго сторона 3 аршина, можно составить три полосы, ленты (въ родѣ I, II и III, на чертежѣ), изъ которыхъ площадь каждой содержитъ въ себѣ ровно 3 квадратныхъ аршина...

То же справедливо для опредѣленія величины площади прямоугольника, котораго длина 7 дюймовъ, а высота, напр., 4 дюйма. Такой прямоугольникъ разрѣзается на 4 полосы, ленты, изъ которыхъ въ каждой 7 квадратныхъ дюймовъ, а потому величина такого прямоугольника равна 7 кв. д. × 4, т. е. 28 кв. дюймамъ.—Необходимо съ учениками усвоить таблицу квадратныхъ мѣръ. Пользоваться при этомъ слѣдуетъ также услугами Пиѳагоровой таблицы умноженія (ср. § 5 гл. II, стр. 29-ая).

Сколько кв. вершковъ въ квадратной сажени? — Сколько кв. аршинъ въ кв. верстѣ?— Сколько кв. сажень въ кв. милѣ?—Сколько кв. линій въ квадратномъ футѣ?—Сколько кв. дюймовъ въ кв. сажени?— Сколько кв. сажень въ 17 кв. верстахъ? И т. д.

Площадь. Всякій квадратъ занимаетъ нѣкоторую площадь...— У пола въ классѣ есть своя площадь...—Не вся площадь стола оклеена клеенкой...— Площадь оконнаго стекла меньше площади стола...—Квадратный аршинъ болѣе квадратнаго вершка во сколько разъ?..—Площадь, занимаемая листомъ бумаги, если его положить на столъ и развернуть хорошенько, больше или меньше площади стола?... — Портретъ Государя на стѣнѣ закрываетъ часть площади стѣны...—Вычислить ту площадь, которую занимаетъ портретъ Государя, на доскѣ!..—Прямоугольникъ, котораго длина 80 сажень, а ширина 30, называется десятиной!...— Десятина представляетъ такой же величины площадь, какъ 2 400 кв. сажень...—Почему?—Десятины бываютъ двоякія: длиной въ 80 саж. и длиною въ 60 сажень; ширина десятины перваго вида 30 саж., а ширина десятины второго рода—40 сажень. Кв. арш., кв. дюймъ — площади...

Квадратныя и линейныя мѣры. Полезно помнить ученикамъ, что въ аршинѣ 28 дюймовъ, что въ кв. арш. 28 кв. д. × 28 и что нелѣпо спрашивать—сколько аршинъ въ квадратной сажени, и думать, что въ кв. сажени четыре аршина.—Надо показать ученикамъ, что въ кв. сажени 9 квадратныхъ аршинъ, и что вопросъ о томъ — сколько въ квадратной сажени линейныхъ аршинъ столь же нелѣпъ, какъ вопросъ о томъ—сколько фунтовъ въ мѣсяцѣ, сколько пудовъ въ одномъ дюймѣ, сколько четвериковъ въ одномъ часѣ, а минутъ—въ одной четверти.

Объемъ. § 18. Что касается кубическихъ мѣръ и измѣренія объемовъ куба и прямоугольнаго параллелепипеда, то ученіе

объ этомъ измѣреніи не представляетъ столь значительной, какъ ученіе объ измѣреніи нѣкоторыхъ площадей, особенной практической важности. (Поэтому въ „Задачникѣ для учителей“, а также въ „Задачникѣ для уч—ковъ“, намѣчено только самое главное, а именно измѣреніе объема куба). Измѣреніе объема куба исчерпывается только наглядными объясненіемъ того, почему, напр., въ кубической сажени не 3, и даже не 3 раза 3 кубическихъ аршина, а 3 раза 9 кубическихъ аршинъ. Эта причина можетъ быть изложена слѣдующимъ образомъ: „Почему въ кубической сажени не 3 куб. аршина, и даже не 3 раза 3 кубическихъ аршина, а 3 раза 9 кубическихъ аршинъ, т. е. 27 кубическихъ аршинъ?— Дѣло въ томъ, что кубическій аршинъ можетъ быть раздѣленъ на 3 одинаковыхъ слоя, пласта, изъ которыхъ каждый, въ свою очередь, можетъ быть раздѣленъ на 3 одинаковыя части, и въ каждой изъ этихъ послѣднихъ будетъ заключаться по 3 кубическихъ аршина. По подобной же причинѣ въ кубическомъ аршинѣ не 16 кубическихъ и не 16 разъ 16 кубическихъ вершковъ, а 16 разъ 256 кубическихъ вершковъ“. Но выясненіе этой причины должно быть поведено на основаніи наглядныхъ пособій, наиболѣе для онаго пригодныхъ (ср. § 8 и 7 гл. II), и при сильномъ воздѣйствіи на геометрическое воображеніе учениковъ. Если учитель пожелаетъ и найдетъ возможнымъ подольше остановиться на терминахъ и разъясненіяхъ, то онъ могъ бы это сдѣлать, примѣрно, слѣдующимъ образомъ (ср. § 126 второго выпуска „Ариѳметическаго задачника для учителей“).

Тѣло, кубъ, грани куба и т. п. Всякій вещественный предметъ называется тѣломъ...— Тѣломъ называютъ не только человѣческое тѣло, а всякій предметъ, всякую вещь, которая состоитъ изъ вещества: изъ дерева, желѣза, мѣди, изъ камня, стекла...—Назовите тѣла!...—Всякое тѣло занимаетъ много или мало мѣста, много или мало пространства...—Количество пространства (сколько мѣста занимаетъ данное тѣло?) называется объемомъ тѣла...—Что больше: объемъ полѣна или объемъ карандаша?.. объемъ морковки или объемъ рѣдьки?... объемъ картофелины или горошинки?...—Когда у насъ есть посудина, сосудъ,—напр., стаканъ, чашка, самоваръ,—то говорятъ, что емкость стакана больше емкости чашки...— Емкость ведра?..— Емкость бочки?.. — Бутылки? — Бревно можно обтесать разно... — Можно изъ дерева сдѣлать тѣло, чтобы оно было похоже на кубикъ...—Ящикъ можно сдѣлать такой, чтобы онъ имѣлъ видъ (т. е. форму) кубика, куба..., чтобы онъ имѣлъ форму кубическую...— У куба шесть граней,— каждая грань у куба — квадратъ...—У куба длина, ширина и высота одинаковы...—Покажите грани куба...—Покажите длину, ширину и высоту куба...—Объемъ куба, кото-

раго длина (у него ширина и высота такія же, какъ длина)...,—объемъ куба, котораго длина — аршинъ, называется кубическимъ аршиномъ... И т. д.— Можно ли узнать—сколько кубическихъ аршинъ въ кубической сажени? (Можно)...—Какъ это сдѣлать?..—Представимъ себѣ, что у насъ есть ящикъ, котораго емкость—кубическая сажень, котораго внутренній объемъ — кубическая сажень. — Тогда въ немъ заключается одна кубическая сажень воздуха...—Положимъ въ этотъ ящикъ одинъ кубъ, величиною въ кубическій аршинъ, на дно, придвинемъ этотъ кубъ къ двумъ смежнымъ стѣнкамъ...—рядомъ приставимъ къ этому кубу еще такой же и придвинемъ его къ одной изъ стѣнокъ, но чтобы онъ вплотную сталъ къ первому кубу... — Такихъ кубовъ на дно можно будетъ положить сколько? (9 штукъ).— Еще разъ!..— На эти 9 кубовъ можно положить еще 9 штукъ, и ящикъ еще наполненъ не будетъ... И т. д.— Въ кубической сажени не 3 куб. арш., и даже не 9 куб. арш., а 3 раза 9 кубическихъ аршинъ, т. е. 27 куб. аршинъ... И т. д.

Упражненіямъ въ рѣшеніи задачъ на квадратныя и кубическія мѣры посвящены №№ 290 и 290б „Задачника для учителей“, а также 290а и 290в „Задачника для учениковъ“.

Задачи на время.

§ 19. Тридцатая ступень (№№ 292—294 „Задачника для уч—лей“) содержитъ въ себѣ упражненія въ рѣшеніи задачъ на вычисленіе времени, представляющихъ, несмотря на нѣкоторыя трудности, подходящій матеріалъ, важный иногда въ практическомъ отношеніи, напр., когда требуется вычислить, сколько дней остается отъ Успенія до Покрова или Николина дня (9 мая) до Воздвиженія и т. п., а иногда полезнаго для удовлетворенія и возбужденія любознательности учениковъ относительно нѣкоторыхъ достопамятныхъ годовъ исторіи родной земли и церкви.

Мѣсяцы.

Начать надо дѣло съ раздробленія и превращенія именованныхъ чиселъ, выражающихъ промежутки времени, затѣмъ перейти къ выясненію начала сутокъ и начала года. Потомъ должны быть выяснены порядокъ мѣсяцевъ и величина каждаго изъ нихъ. Понятіе о високосномъ годѣ должно быть принято учащимися на-вѣру.—Способъ запоминанія числа дней въ каждомъ мѣсяцѣ можетъ быть предложенъ дѣтямъ слѣдующій: начиная съ мизинца лѣвой руки, каждый палецъ этой руки, за исключеніемъ большого, и каждый промежутокъ между этими четырьмя пальцами соотвѣтствуетъ мѣсяцу: мизинецъ — январю, промежутокъ между мизинцемъ и безымяннымъ пальцемъ — февралю, безымянный — марту, второй промежутокъ—апрѣлю, третій (средній) палецъ—маю, третій промежутокъ — іюню, указательный іюлю; потомъ счетъ начинается снова: мизинецъ—августу, промежутокъ—сентябрю и т. д. до средняго пальца, соотвѣтствующаго декабрю. При этомъ мѣсяцъ, соотвѣтствующій пальцу, содержитъ 31 день, а соотвѣтствующій промежутку, —менѣе 31-го дня, т. е. 30 дней (февраль—28 или 29). Порядокъ мѣсяцевъ обязательно долженъ быть усвоенъ дѣтьми наизусть. Не мѣшаетъ также запомнить, что во второмъ полугодіи всего 184 дня, а въ первомъ—181 или 182 дня, смотря по тому — идетъ ли рѣчь о простомъ или же о високосномъ годѣ. При нѣкоторыхъ вычисленіяхъ это можетъ оказаться полезнымъ.

Раздѣленіе сутокъ.

Относительно сутокъ должно принять во вниманіе, что сутки въ общежитіи раздѣляются на 4 неравныя части: приблизительно отъ 3-хъ часовъ пополуночи до 9 часовъ пополуночи—утро, отъ 9 часовъ пополуночи до 6-ти пополудни—день, отъ 9-ти часовъ пополудни до 9 часовъ пополудни—вечеръ, отъ 9-ти пополудни до 3 часовъ пополуночи—ночь. Но это раздѣленіе не обязательно и допускаетъ нѣкоторый произволъ въ зависимости отъ образа жизни лица говорящаго. Поэтому слѣдуетъ пріучить дѣтей также къ пониманіе реченій пополудни и пополуночи, такъ какъ смыслъ ихъ можетъ быть совершенно точно установленъ. Однако же въ задачахъ и въ жизни не мѣшаетъ пользоваться также и удобствами выше даннаго или другого условнаго, какъ не приводящаго ни къ какимъ недоразумѣніямъ, раздѣленія сутокъ на указанныя четыре части. Это облегчаетъ указаніе, о какомъ часѣ идетъ рѣчь.

Вычисленіе пром. промежутковъ времени.

Вопросы о томъ, сколько дней отдѣляютъ одно число какого-либо мѣсяца отъ другого числа того же или другого мѣсяца, затрудняютъ не только дѣтей, но иногда даже и взрослыхъ, прибѣгающихъ въ такомъ случаѣ къ расчету на пальцахъ. — Ариѳметически этотъ вопросъ рѣшается такъ: между 3-мъ и 4-мъ числомъ одного и того же мѣсяца, въ общежитейскомъ смыслѣ, нѣтъ ни одного дня, т. е. конецъ 3-го числа совпадаетъ съ началомъ 4-го; между 3-имъ и 5-ымъ числомъ одинъ день, между 3-имъ и 6-ымъ—два дня, и т. д.; между 3-мъ и 25-мъ не 22 дня (число 22 получится, если изъ 25 вычесть 3), а только 21 день. Дѣло въ томъ, что въ этомъ случаѣ разсчитываютъ время между концомъ (полуночью) 3-ихъ сутокъ и началомъ 25-ыхъ сутокъ (т. е. между полуночью съ 24-го числа на 25-е). Въ житейскихъ дѣлахъ расчеты этого рода иногда очень важны. Вопросъ о числѣ дней между какимъ-нибудь числомъ одного мѣсяца и какимъ-нибудь числомъ другого рѣшается

на основаніи того же соображенія, но при этомъ важно число дней каждаго изъ мѣсяцевъ, входящихъ въ расчетъ.

Календарныя задачи. Задачи календарнаго содержанія бываютъ трехъ родовъ: а) требуется опредѣлить промежутокъ времени, прошедшій между двумя моментами времени, выраженными въ видѣ календарныхъ данныхъ: сколько времени протекло между 27-мъ числомъ декабря 1856 года и 13-мъ числомъ февраля-мѣсяца 1895 года; б) требуется разсчитать, какое число какого мѣсяца и года наступитъ по прошествіи нѣкотораго промежутка времени, считая съ даннаго момента, выраженнаго календарнымъ числомъ; и в) требуется разсчитать, какое число какого мѣсяца и года было столько-то времени тому назадъ, считая съ даннаго момента, выраженнаго въ видѣ календарнаго числа.—Задачи всѣхъ трехъ родовъ требуютъ особенно большой аккуратности въ вычисленіяхъ. Но особенныхъ методическихъ трудностей они не представляютъ, ежели ученики понимаютъ значеніе принятой „эры“ лѣтосчисленія, т. е. значеніе дня, съ котораго у насъ начинается счетъ времени,—дня, достопамятнѣйшаго для подобныхъ вычисленій, а именно 1-го янв. 1-го года по Рождествѣ Христовѣ. Только въ томъ случаѣ дѣло поставлено правильно, если ученики вполнѣ безошибочно и быстро будутъ отвѣчать на вопросы такого рода: сколько времени прошло отъ 1-го января 1-го года по Рождествѣ Христовѣ до 19 февраля 1861 года, т. е. будутъ отвѣчать: отъ 1-го января 1-го года по Рождествѣ Христовѣ прошло 1860 лѣтъ, 1 мѣсяцъ и 18 дней, и т. п. До этого умѣнія можно учениковъ довести путемъ упражненій на часахъ дня (сколько прошло времени отъ полуночи до сорока минутъ шестого часа по полуночи), на дняхъ мѣсяца (сколько времени прошло отъ 1-го іюля до 15-го іюля), на мѣсяцахъ года (сколько времени прошло отъ 1-го января до 15-го іюня того же года), и наконецъ — на годахъ нашей эры. О существованіи эры, начальнымъ моментомъ которой считаютъ сотвореніе міра, надо ученикамъ дать нѣкоторое понятіе.

Смѣшанныя задачи. Когда всѣ вышеописанныя 30 ступеней пройдены, то наступило время для рѣшенія задачъ съ цѣлью упражненія дѣтей не въ чемъ иномъ, какъ именно въ этомъ рѣшеніи, т. е. съ цѣлью упражненія ихъ въ рѣшеніи задачъ болѣе или менѣе сложныхъ. Нѣкоторыя изъ нихъ требуютъ только продолжительнаго вычисленія и принятія во вниманіе данныхъ для вычисленія чиселъ, которыя требуютъ со стороны учащагося постояннаго вниманія. Такова, напр., задача подъ № 298 „Задачника для учениковъ“, въ которой требуется разсчитать, какого числа и какого года родился тотъ человѣкъ, которому минуло 7000 дней

отъ-роду 25 февраля 1884 г., или подъ № 315, въ которой требуется опредѣлить вѣсъ ведра воды по достаточнымъ для того даннымъ. Другія задачи требуютъ расчлененія ихъ на нѣсколько простыхъ, напр., подъ №№ 301, 308, 314 и т. д. Третьи требуютъ нѣкоторой вдумчивости въ терминологію и знанія, что такое слагаемыя, множитель, дѣлитель; таковы, напр., №№ 335, 341 и т. д.—Умѣстны здѣсь также упражненія въ переводѣ, мѣръ метрической системы въ мѣры русской и обратно.

Дополнительныя статьи. § 20. Если время позволяетъ (особенно въ четвертый годъ обученія), то выше разсмотрѣнныя ступени могутъ быть дополнены упражненіями въ рѣшеніи задачъ на такъ называемыя пропорціональное дѣленіе и правило смѣшенія 2-го рода, и вообще нѣкоторыхъ задачъ чисто-алгебраическаго характера, хотя задачи поименованныхъ родовъ, строго говоря, выходятъ далеко за предѣлы курса ариѳметики, подлежащаго прохожденію въ одноклассной нач. школѣ (ср. § 15 гл. II). (Учитель начальной школы, котораго особенно занимаетъ рѣшеніе задачъ этого рода, можетъ найти нѣкоторыя указанія въ гл. VII, а также во второмъ выпускѣ „Ариѳметическаго задачника для учителей“).—Въ нѣкоторыхъ случаяхъ ходъ работы, впрочемъ, можетъ быть, примѣрно, слѣдующій:

Смыслъ пропорціональнаго дѣленія. Мы умѣемъ дѣлить числа на извѣстное число равныхъ между собою частей: пополамъ, на три части и т. д.—Но иногда встрѣчаются задачи особаго рода: пусть, напр., отецъ оставилъ двумъ своимъ сыновьямъ наслѣдство въ 5000 рублей съ тѣмъ, чтобы старшій получилъ в т р о е больше другого... — Повторите!.. — Что требуется сдѣлать? (Раздѣлить 5000 руб. на д в ѣ части, но не одинаковыя, а такія, чтобы одна часть была болѣе другой въ 3 раза)...—Рѣшать ея не будемъ, но замѣтимъ себѣ эту задачу!..—Или вотъ другая задача: разстояніе между двумя деревнями 45 верстъ по прямой дорогѣ; между этими двумя деревнями по той же дорогѣ сельцо,—на такомъ разстояніи отъ обѣихъ деревень, что отношеніе разстоянія между сельцомъ и другою деревнею равно отношенію 5-ти къ 4-мъ... Говорятъ и иначе, а именно: требуется раздѣлить 45 вер. на такія двѣ части, чтобы одна о т н о с и л а с ь къ другой такъ, какъ 5 относится къ 4...—Рѣшать ея тоже не будемъ, но въ нее вдумаемся: какъ надо раздѣлить 45? (Такъ, чтобы одна часть относилась къ другой, какъ 5 относится къ 4)...—Что это значитъ? (Это значитъ, что какъ 4 составляетъ извѣстную часть 5-ти, такъ о д н а часть 45-ти должна составлять такую же часть д р у г о й части 45-ти, какую часть 5-ти составляетъ 4; или что одна часть 45-ти должна быть

во столько же разъ больше другой части 45-ти, во сколько разъ 5 болѣе 4-хъ; или что *въ одной части 45-ти верстъ нѣкоторое опредѣленное разстояніе должно заключаться 5 разъ, въ то время какъ въ другой части тѣхъ же 45-ти верстъ то же опредѣленное разстояніе должно содержаться ровно 4 раза)*...—Когда надо раздѣлить какое-нибудь число на двѣ части такъ, чтобы въ первой изъ нихъ содержалось 5 такихъ долей, какихъ въ другой содержится 4, то это выражаютъ и н а ч е, говоря: „раздѣлить число въ отношеніи 5-ти къ 4-мъ“...—Что это значитъ раздѣлить данную величину *пропорціонально* числамъ 3 и 7? (Это значитъ, что надо раздѣлить ее на двѣ части, въ одной изъ которыхъ 3 такихъ доли, какихъ въ другой ровно 7)...—Что это значитъ раздѣлить данное число въ отношеніи 8 : 7? (Это значитъ также—раздѣлить его на двѣ части такъ, чтобы восьмая доля первой изъ нихъ содержалась во второй ровно 7 разъ)...—Если требуется раздѣлить число на такія двѣ части, чтобы одна равнялась п я т и ш е с т ы м ъ другой, то это значитъ...?—(Это значитъ, что его надо раздѣлить на такія двѣ части, чтобы ш е с т а я д о л я второй части содержалась р о в н о п я т ь р а з ъ въ первой).

Задачи на пропорціональное дѣленіе. Раздѣлить 45 на такія двѣ части, чтобы одна была болѣе другой въ 4 раза!..—Рѣшеніе: въ 45-ти единицахъ двѣ части, изъ которыхъ одна въ 4 раза больше другой; въ первой части четыре такихъ части, какъ вторая, стало-быть, въ цѣломъ такихъ частей, какъ вторая, ровно пять...; а потому 45 надо раздѣлить на пять р а в н ы х ъ между собою долей; одна изъ нихъ равна 9-ти, и это—одна изъ требуемыхъ частей, на которыя надо раздѣлить 45, а остальное, т. е. 45—9 или 36—другая искомая часть...—Раздѣлить 120 на такія двѣ части, чтобы одна была больше другой въ 3 раза, въ 4 раза, въ 5 разъ, въ 6 разъ, въ 7 разъ! въ 9 разъ! въ 11 разъ! въ 14 разъ!..—Несмотря на то, что учителямъ задачи этого рода кажутся весьма легкими, для учениковъ онѣ, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ, представляютъ весьма значительныя трудности. Сначала они склонны, если требуется раздѣлить 120 на такія двѣ части, чтобы одна была больше другой, напр., въ 5 разъ, дѣлить 120 на двѣ одинаковыя части съ тѣмъ, чтобы потомъ одну изъ этихъ половинъ помножить на 5. Только послѣ многихъ упражненій ученики привыкаютъ, но не всегда сознательно относятся, къ правильному рѣшенію.—Провѣрка полученнаго рѣшенія для задачъ этого рода особенно полезна, такъ какъ с а м а я провѣрка содержитъ главныя

условія, способствующія уясненію самой сущности рѣшенія задачи. Небезполезно также изобрѣтеніе подобныхъ задачъ самими учениками.

Отношеніе выражено въ видѣ дроби. Иного разсужденія требуютъ задачи такого рода: Раздѣлить число 280 на двѣ такія части, чтобы одна составляла $\frac{3}{5}$ другой...—Въ 280-ти содержится, стало-быть, п я т ь пятыхъ долей этой второй части и еще т р и пятыхъ доли ея, т. е. $\frac{8}{5}$ долей всей второй части!... — А потому для нахожденія величины этой второй части надобно по восьми пятымъ долямъ нѣкотораго числа найти сначала одну пятую, потомъ $\frac{5}{5}$ и, наконецъ, $\frac{3}{5}$ его!... Ее можно разрѣшить и такимъ образомъ: въ одной изъ частей 280-ти 5 такихъ долей, какихъ въ другой — всего 3, а въ цѣломъ, т. е. въ 280-ти всѣхъ такихъ частей 8, и т. д.

Дѣленіе на три части. Задачи слѣдующаго вида вообще рѣшаются значительно легче: Раздѣлить 275 на три части, въ отношеніи чиселъ 2, 3 и 6...—Что это значитъ? (Это значитъ, что въ одной части нѣкоторое число содержится 2 раза, въ другой — 3 раза, а въ 3-ей — ровно 6 разъ)...— Это значитъ также, что если третью часть раздѣлить на 6 одинаковыхъ долей, то во второй такихъ долей должно быть 3, а въ первой двѣ...—Можно къ рѣшенію этой задачи примѣнить любое значеніе ея условій. Примѣнимъ первое изъ приведенныхъ значеній: нѣкоторое число должно содержаться въ первой части 2 раза, во второй—3 раза, а въ третьей—6 разъ; стало-быть, во всемъ цѣломъ, т. е. въ 275-ти единицахъ, это число должно содержаться ровно 11 разъ (т. е. 2 раза, да еще 3 раза, да еще 6 разъ).—Если ужъ рѣшать задачи этого рода съ учениками одноклассной начальной школы, то главнѣйшее вниманіе надо обращать не на самыя задачи, а прежде всего—на смыслъ раздѣленія числа на способъ рѣшенія пропорціональныя даннымъ числамъ, намѣченный нами выше.

Смѣшеніе 2-го рода. Неопредѣленныя задачи на такъ наз. смѣшеніе второго рода принадлежатъ либо къ числу задачъ, разрѣшаемыхъ на-угадъ, либо же къ числу задачъ чисто-алгебраическаго характера. Понятно поэтому, что въ курсѣ ариѳметики, который такъ точно ограниченъ нѣкоторыми вполнѣ рѣзкими предѣлами, онѣ совершенно не умѣстны. Опредѣленныя же задачи этого рода (на смѣшеніе 2-хъ сортовъ товара) могутъ быть разрѣшаемы слѣдующимъ образомъ: „У торговца два сорта чаю;

фунтъ перваго сорта стоитъ 3 р. 40 к., а фунтъ второго сорта 1 р. 70 коп.; онъ желаетъ смѣшать нѣкоторыя количества чаю того и другого сорта съ тѣмъ, чтобы получить 70 фунтовъ чаю стоимостью по 2 р. 10 к. за фунтъ; сколько онъ долженъ для этого взять фунтовъ чаю перваго сорта и сколько второго?“ Если разсчитаемъ, во что торговцу обойдется вся смѣсь, то получимъ

2 р. 10 к. × 70 = 147 р....

Возьмемъ (это надо себѣ представить) 70 ф. чаю второго сорта; они стоятъ 119 рублей, т. е. дешевле, чѣмъ 70 ф. смѣси, составляемой купцомъ, на 28 рублей; теперь одинъ фунтъ изъ числа взятыхъ нами фунтовъ чаю замѣнимъ однимъ фунтомъ чаю перваго сорта...; что случится? взятый нами чай станетъ дороже на 70 к. (потому что 2 р. 40 к.—1 р. 70 к.=70 к.), т. е. будетъ стоить уже не 119 р., а 119 р. 70 к...—Замѣнимъ еще одинъ фунтъ чаю низшаго сорта однимъ фунтомъ чаю сорта высшаго...; опять взятое нами количество чаю будетъ дороже прежняго на 70 к.; т. е. это количество чаю, состоящее изъ 68 ф. чаю низшаго сорта и 2-хъ ф. высшаго сорта, будетъ стоить 120 р. 40 к...—Сколько намъ нужно фунтовъ чаю низшаго сорта замѣнить чаемъ высшаго сорта для того, чтобы весь чай стоилъ не 119 рублей, а 147 р.? (Столько, сколько разъ надо взять слагаемымъ 70 к. для того, чтобы получить 28 р.)...— Стало-быть, число фунтовъ чаю высшаго сорта равно отношенію 2 800 къ 70... И т. д.— Есть и другой способъ рѣшенія задачъ этого рода: на цѣломъ фунтѣ чаю высшаго сорта торговецъ, продавая его по 2 р. 10 к. за фунтъ, получилъ бы убытку 30 к., а на каждомъ фунтѣ чаю низшаго сорта торговецъ, продавая чай этотъ по 2 р. 10 к. за фунтъ, получилъ бы 40 к. прибыли, а надо составить такую смѣсь, чтобы, продавая фунтъ смѣси по 2 р. 10 к., не получить при этомъ ни прибыли, ни убытку...— Для этого надо на 3 фунта высшаго сорта брать 4 фунта чаю сорта низшаго...—Это значитъ, что 70 ф. смѣси надо составить, беря одновременно изъ перваго сорта три, а изъ второго четыре фунта.—Первый способъ, конечно, обстоятельнѣе второго.

Сложныя чисто-ариѳметическія задачи. § 21. Извѣстно, что замысловатыя задачи алгебраическаго характера, большею частью, затруднительны не по количеству требующихся для ихъ рѣшенія вычисленій, а по причинѣ тонкости тѣхъ соображеній, которыя требуются для ихъ разрѣшенія. Сложныя же чисто-ариѳметическія задачи трудны въ слѣдующихъ двухъ отношеніяхъ: 1) условія ихъ иногда требуется хорошенько разсортировать и 2) вычисленія иногда весьма многочисленны. Въ виду того, что въ ариѳметическихъ задачникахъ онѣ должны бы играть главную роль и что онѣ встрѣчаются не рѣже задачъ алгебраическаго характера, полезно уяснить себѣ эти трудности (№№ 296—384 „Ариѳметическаго задачника для учениковъ“, вып. I). Пусть предложена задача:

„Купецъ купилъ 4 партіи сахару по 4 руб. за пудъ; во всѣхъ четырехъ партіяхъ было 535 пуд., въ первой партіи было 86 п., во второй—вдвое больше, въ третьей—на 32 пуда меньше, чѣмъ во второй, а въ четвертой—остальное; сахаръ первой партіи проданъ купцомъ по 5 р. 10 к. за пудъ, сахаръ второй партіи—по 3 р. 95 к. за пудъ, а третьей партіи—по 5 р. 30 к. за пудъ: за перевозку всего сахара заплачено 507 р. 26 к. Почемъ онъ продавалъ пудъ сахару четвертой партіи, если на всемъ сахарѣ получилъ прибыли среднимъ числомъ по 70 к. съ пуда“? Условія должно записать такъ:

Купилъ 4 партіи по 4 руб. за пудъ;
всего было 535 пуд.;
въ 1-ой 86 п.;
во 2-ой 86 п. × 2;
въ 3-ей на 32 пуда меньше, чѣмъ во 2-ой;
въ 4-ой остальное;
продалъ 1-ую партію по 5 р. 10 к. за пудъ;
„ 2-ую „ „ 3 „ 95 „ „ „
„ 3-ью „ „ 5 „ 30 „ „ „
„ 4-ую „ почемъ за пудъ?
За перевозку уплатилъ 507 р. 26 коп.
Прибыли получилъ по 70 к. съ пуда.

Дѣйствія учащійся долженъ расположить такъ:

1) 86 п. × 2 = 172 п.; было во 2-й партіи:
2) 172 п. — 32 п. = 140 п.; было въ 3-ей партіи;
3) 86 п.
172 „
+ 140 „
398 п. было въ первыхъ трехъ партіяхъ;
4) 535 „ „ во всѣхъ четырехъ партіяхъ.
— 398 „ „ въ трехъ партіяхъ.
137 п. было въ 4-й партіи:

5) 4 р. × 535 = 2 140 р.; заплачено за весь сахаръ;
6) 2 140 р. + 507 р. 26 к. = 3 647 р. 26 к.; обошелся купцу весь сахаръ;
7) 70 к. × 535 = 37 450 к.; 374 р. 50 к. получилъ всего прибыли;
8) 2 647 р. 26 к. истрачено на сахаръ.
+ 274 „ 50 „ получилъ прибыли.

3 021 р. 76 к.; всего выручено;
9) 5 р. 10 к. × 86 = 538 р. 60 к.; выручено за 1-ую партію (430 р., считая по 5 р. за пудъ; 8 р. 60 к., считая по 10 к.);
10) 3 р. 95 к. × 172 = 679 р. 40 к.; выруч. за 2-ую.

688 р. (считая по 4 р. за пудъ)
— 8 „ 60 к.;

11) 5 р. 30 к. × 140 = 742 р.; выруч. за 3-ю.

700 р. (считая по 5 р.)
+ 42 „ (считая по 30 к.);

12) 438 р. 60 к.
679 „ 40 „
+ 742 „ — „

1 860 р. — к. выручено за первыя три партіи;
13) 3 021 р. 76 к. „ „ всѣ партіи.
— 1 860 „ — „ „ „ три „

1 161 р. 76 к. выручено за 4-ую партію.
14) 1 161 р. 76 к. | 137 = 8 р. 48 к.

Отвѣтъ: купецъ продавалъ пудъ сахару 4-й партіи по 8 р. 48 коп.

Трудности рѣшенія. Вся трудность пріученія дѣтей къ правильному рѣшенію сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ состоитъ въ пріученіи ихъ: 1) къ разумной записи условій задачи и уразумѣнію ихъ смысла и связи, 2) къ выработкѣ и установкѣ твердаго и опредѣленнаго плана рѣшенія, 3) къ твердому и послѣдовательному употребленію надлежащихъ дѣйствій, 4) къ чистому и аккуратному выполненію работы. При рѣшеніи задачъ этого рода можно, какъ замѣчено выше, прибѣгнуть къ одному изъ двухъ способовъ: а) синтетическому и б) аналитическому. Первый быстрѣе

ведетъ къ цѣли, когда задача не очень сложна,—второй ведетъ къ цѣли медленно, но за-то не отказываетъ никогда въ своей помощи. Надо всѣхъ учениковъ пріучить къ употребленію преимущественно синтетическаго спооособа.—Для большей ясности ниже предлагается двоякій, примѣрный, разборъ нашей задачи.

§ 22. Синтетическій отправляется отъ частностей задачи къ рѣшенію ея вопроса. *Синтетическій способъ.*

Куплено 4 партіи по 4 руб. за пудъ. Что мы можемъ отсюда узнать? (Ничего).—Всего куплено 535 п. А отсюда? (Зная, что за пудъ заплачено по 4 руб. и что всего куплено 535 пуд., можемъ узнать, что заплачено за весь сахаръ).—Въ 1-ой партіи 86 пудовъ. Что можемъ узнать? (Сколько уплачено за сахаръ первой партіи).—Во 2-й партіи вдвое болѣе, чѣмъ въ первой.—Что можемъ узнать? (Можемъ узнать—сколько во 2-й партіи).—Какое надо для этого произвести дѣйствіе? (Умноженіе).—Что умножить? (86 п.).—На сколько? (На 2).—Запишемъ въ строчки:

I. 4 р. × 525 = 2 140 р.; уплачено за весь сахаръ.
II. 4 р. × 86 = 344 р.; уплачено за сахаръ первой партіи.
III. 86 п. × 2 = 172 п.; было во 2-й партіи.

Разсмотримъ снова первыя четыре условія: увидимъ, что ничего нельзя узнать новаго и важнаго. Ибо: вычтя изъ 535 п. количество пудовъ первой и второй партіи, мы узнаемъ, сколько пудовъ въ третьей и четвертой вмѣстѣ, а это насъ не подвинетъ дальше. Можемъ узнать, сколько всего уплачено за первую и за вторую партію вмѣстѣ, но и это насъ дальше не подвинетъ. А потому обратимся къ другимъ условіямъ задачи. Въ 3-ей партіи на 32 пуда меньше, чѣмъ во 2-ой; мы можемъ на основаніи III-ей строчки этого рѣшенія узнать—сколько сахару было въ 3-й партіи. И т. д., и т. д.—При этомъ придется временно бросить первыя три строчки и обратиться къ вопросу, сколько пудовъ въ каждой партіи. Можно всѣ строчки записывать и иначе, а именно такъ (для краткости приведено только продолженіе рѣшенія):

IV. Сколько было сахару во 2-ой партіи?

Отвѣтъ. 172 пуда.

Дѣйствіе. 86 × 2 = 172.

V. Сколько было сахару въ 3-ей партіи?

Отвѣтъ. 140 пуд.

Дѣйствіе. 172 — 32 = 140. И т. д.

При такой формѣ записи отвѣтъ записывается послѣ производства дѣйствія, а дѣйствія производятся надъ отвлеченными числами.—Но очевидно, что синтетическій способъ можетъ иногда, въ особенности когда въ задачѣ слишкомъ много условій,—неопытнаго ученика отвлечь въ сторону.

Аналитическій способъ. § 23. Разсмотримъ аналитическій способъ рѣшенія той же задачи, отправляющійся отъ вопроса къ условіямъ и пользующійся разсужденіями общими.

Что надо узнать? (Почемъ купецъ продавалъ пудъ сахару четвертой партіи).— Что надо знать для рѣшенія этого вопроса? (Надо знать—что онъ выручилъ за всю 4-ую партію и сколько въ ней было пудовъ).—Знаемъ ли мы какую-либо изъ этихъ величинъ? (Нѣтъ, не знаемъ).

Стало-быть, сначала надо опредѣлить, что выручено за 4-ую партію.—Что надо знать для опредѣленія того, что выручено за 4-ую партію? (Надо знать — что выручено за весь сахаръ и что за первыя три партіи).—Знаемъ ли мы какую-либо изъ этихъ величинъ? (Нѣтъ, не знаемъ).—Что надо знать для опредѣленія того, что выручено за всѣ четыре партіи? (Надо знать, во что ему обошелся весь сахаръ и что онъ получилъ прибыли на немъ).—Знаемъ ли мы хоть одну изъ этихъ величинъ? (Нѣтъ, не знаемъ).—Что надо знать для опредѣленія того, во что ему обошелся весь сахаръ? (Надо знать—сколько было всего сахару, почемъ онъ заплатилъ за пудъ его и какіе онъ понесъ еще расходы).—Знаемъ ли мы хоть одну изъ этихъ величинъ? (Знаемъ всѣ три).

Далѣе надо разрѣшить вопросъ о томъ—что выручено за весь сахаръ? (Отвѣтъ и дѣйствія записываются послѣ того, какъ весь планъ, въ видѣ вопросовъ, составленъ).

I. Что заплачено за весь сахаръ? Отв. 2 140 р.
Дѣйствіе. $4 \times 535 = 2\,140$.

II. Во что обошелся сахаръ съ перевозкой? Отв. 2 647 р. 26 к.
Дѣйствіе. 2 140 р. + 507 р. 26 к. = 2 647 р. 26 к.

III. Ск. получено прибыли на всемъ сахарѣ? Отв. 374 р. 50 к.
Дѣйствіе. $70 \times 535 = 37\,450$.

IV. Что выручено за весь сахаръ? Отв. 3 021 р. 76 к.
Дѣйствіе. 2 647 р. 26 к. + 374 р. 50 к. = 3 021 р. 76 к.

Теперь надо обратиться ко второй величинѣ,—что выручено за первыя три партіи сахару?—Что надо знать для опредѣленія этой величины? (Надо знать, сколько выручено за 1-ую, сколько за 2-ую и сколько за 3-ью).—Что надо знать для рѣшенія каждаго изъ вопросовъ?—(Надо знать—почемъ продавался пудъ каждой изъ первыхъ трехъ партій и сколько пудовъ было въ каждой изъ нихъ).—Знаемъ ли мы какія-либо изъ этихъ величинъ? (Знаемъ: вырученное за пудъ каждой изъ первыхъ 3-хъ партій и количество пудовъ въ первой партіи).—Что еще надо узнать? (Количество пудовъ во 2-ой и въ 3-ей партіяхъ).—Что говорится въ задачѣ объ этихъ количествахъ? (Говорится, что во второй партіи вдвое болѣе, чѣмъ въ первой, а въ третьей на 32 пуда менѣе, чѣмъ во второй).

Составимъ планъ опредѣленія того, сколько сахару во второй, сколько—въ третьей и сколько—въ четвертой партіяхъ:

V. Сколько во второй? Отв. 172 пуда.
Дѣйствіе. $86 \times 2 = 172$.

VI. Сколько въ третьей? Отв. 140 пудовъ.
Дѣйствіе. $172 - 32 = 140$.

VII. Сколько въ первыхъ трехъ вмѣстѣ? Отв. 398 пудовъ.
Дѣйствіе. $86 + 172 + 140 = 398$.

VIII. Сколько въ одной четвертой? Отв. 137 пудовъ.
Дѣйствіе. $535 - 398 = 137$.

Теперь составимъ планъ опредѣленія того, что выручено за первыя три и что за четвертую партію?

IX. Сколько выручено за первую партію? Отв. 438 р. 60 к.
Дѣйствіе. $510 \times 86 = 43\,860$.

X. Сколько выручено за вторую партію? Отв. 679 р. 40 к.
Дѣйствіе. $395 \times 172 = 67\,940$.

XI. Сколько выручено за третью партію? Отв. 742 р.
Дѣйствіе. $530 \times 140 = 74\,200$.

XII. Сколько выручено за всѣ три партіи? Отв. 1860 р.
Дѣйствіе. 438 р. 60 к. + 679 р. 40 к. + 742 р. = 1860 р.

XIII. Ск. выручено за одну четвертую партію? Отв. 1 161 р. 76 к.
Дѣйствіе. $302\,176 - 186\,000 = 116\,176$.

XIV. Почемъ проданъ пудъ сахару 4-ой партіи? Отв. 8 р. 48 к.
Дѣйствіе. 1 161 р. 76 к. | 137 = 8 р. 48 к.

Когда планъ рѣшенія намѣченъ, тогда только надо приступить, какъ это замѣчено выше, къ полному рѣшенію каждаго вопроса, дабы не утерять нити разсужденій. Очевидно, что аналитическій способъ рѣшенія довольно утомителенъ и что его примѣненіе къ рѣшенію задачъ требуетъ нѣкоторой тонкости ума и очень большого навыка. Въ не слишкомъ сложныхъ задачахъ большею частью неестественно прибѣгать къ аналитическому способу для рѣшенія задачи, но для упражненія въ примѣненіи этого способа необходимо начинать именно съ задачъ не очень сложныхъ. Въ очень же сложныхъ слѣдуетъ не цѣликомъ разбирать всю задачу, а такъ, какъ это сдѣлано выше, — раздѣлить ея разборъ на нѣсколько пунктовъ; выше эти пункты таковы: а) что выручено за весь товаръ? б) сколько сахару въ каждой партіи? в) сколько выручено за каждую партію?

Обозначеніе искомыхъ чиселъ буквами.

Можно при составленіи плана рѣшенія задачи временно разрѣшать ученикамъ обозначеніе результатовъ буквами какой-либо азбуки, дабы они не занимались выполненіемъ дѣйствій, могущимъ отвлечь ихъ вниманіе отъ составленія плана. Тогда можно составлять планъ рѣшенія, начиная не съ вопросовъ. Въ нашей задачѣ это приведетъ къ такимъ строчкамъ плана:

I. 4 р. × 535 = **a** р.; уплачено за весь сах.;
II. **a** р. + 507 р. 26 к. = **q** к.; обошелся весь сах.;
III. 70 к. × 535 = **c** к.; получено всего прибыли;
IV. **q** к. + **c** к. = **d** к.; выручено за весь сах.:
V. 86 п. × 2 = **m** п.; во второй партіи;
VI. **m** п. — 32 п. = **n** п.; въ третьей партіи;
VII. 86 п. + **m** п. + **n** п. = **k** п.; въ первыхъ трехъ парт.;
VIII. 535 п. — **k** п. = **r** пуд.; въ четвертой;
IX. 5 р. 10 к. × 86 = **e** к.; выруч. за первую;
X. 3 р. 95 к. × **m** = **f** к.; „ „ вторую;
XI. 5 р. 30 к. × **n** = **g** к.: „ „ третью;
XII. **e** к. + **f** к. + **g** к. = **h** к. „ „ всѣ три;
XIII. **d** к. — **h** к. = **i** к.; „ „ четвертую;
XIV. **i** к.: **r** = **x** к.; прод. пудъ 4-ой партіи.

Буквы въ этомъ случаѣ только облегчаютъ трудъ по составленію плана рѣшенія, но, конечно, не представляютъ собою ничего обязательнаго. Алгебраическихъ элементовъ буквенное обо-

значенія чиселъ и результатовъ, конечно, не вноситъ. Вмѣсто латинскихъ буквъ можно употреблять, конечно, и русскія буквы или римскія цифры.—Когда планъ составленъ, можно смѣло приступить къ выполненію дѣйствій, чѣмъ достигается столь необходимая въ обученіи возможность слѣдованія принципу Коменскаго: „по одной трудности за-разъ!“

Значеніе приведенныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ.

§ 24. Взвѣсивъ выгоды аналитическаго и синтетическаго способовъ рѣшенія сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, можно прійти къ слѣдующимъ заключеніямъ: а) синтетическій способъ рѣшенія можетъ отвлечь вниманіе учениковъ отъ необходимыхъ дѣйствій и привести ихъ къ дѣйствіямъ, для рѣшенія задачи даже не нужнымъ; б) аналитическій способъ требуетъ значительной тонкости ума и значительной власти надъ разсужденіями, исходящими изъ общихъ соображеній; съ другой стороны, в) синтетическій способъ иногда быстрѣе, а аналитическій—вѣрнѣе ведетъ къ цѣли. Но усвоеніе обоихъ способовъ рѣшенія сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ выходитъ, чаще всего, далеко за предѣлы непосредственныхъ цѣлей обученія ариѳметикѣ. Кромѣ того, во всякомъ случаѣ, усвоеніе это требуетъ весьма многочисленныхъ упражненій. Естественно, поэтому, задаться вопросомъ, нѣтъ ли чисто-методическихъ пріемовъ, облегчающихъ ученикамъ трудъ усвоенія пріемовъ разрѣшенія сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ болѣе или менѣе независимо отъ навыковъ и правилъ ихъ разрѣшенія утомительнымъ аналитическимъ и не всегда надежнымъ синтетическимъ способомъ? Опытъ показываетъ, что наилучшимъ къ тому средствомъ, отнюдь не требующимъ отъ учениковъ слишкомъ большой затраты времени и не отзывающимся сколько-нибудь вредно на развивательной сторонѣ обученія, а наоборотъ—вліяющимъ на нее въ высшей степени полезно, можетъ служить предварительное рѣшеніе учениками сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, которымъ выше дано названіе приведенныхъ (см. § 10 гл. II). Само собою разумѣется, что раньше всего учитель долженъ научить дѣтей рѣшенію приведенныхъ задачъ (при этомъ аналитическій способъ рѣшенія окажется совсѣмъ ненужнымъ и часто даже не примѣнимымъ). Затѣмъ учитель можетъ перейти къ рѣшенію съ ними, подъ его руководствомъ, тѣхъ же задачъ, но въ болѣе или менѣе неприведенномъ видѣ, и только когда это исполнено, предложить имъ сложныя неприведенныя задачи для самостоятельной работы.

Прорабатывая сложныя чисто-ариѳметическія задачи, учитель долженъ исподволь пріучать свой классъ къ рѣшенію неприведенныхъ задачъ. Но отсюда, впрочемъ, отнюдь не слѣдуетъ, что онъ долженъ все время учениковъ вести какъ-бы на-помочахъ, т. е. предлагать непремѣнно каждую задачу въ приведенномъ видѣ. Напротивъ: онъ долженъ руководствоваться состояніемъ успѣховъ въ классѣ, принимать во вниманіе пользу также и болѣе способныхъ учениковъ, которымъ (для самостоятельныхъ занятій) можно изрѣдка предлагать и неприведенныя задачи. Вообще, учитель долженъ и въ этомъ случаѣ руководствоваться своимъ учительскимъ чутьемъ и вкусомъ. Не навязывая ученикамъ того или иного (аналитическаго или синтетическаго) способа рѣшенія, а принимая лишь во вниманіе только-что развитое значеніе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, приведенныхъ и неприведенныхъ, учитель будетъ въ состояніи: а) постепенно развить въ ученикахъ умѣніе справляться со смысломъ задачи, б) сообразоваться съ особенностями и силами даннаго класса, в) сообразоваться съ личными особенностями нѣкоторыхъ, почему-либо отставшихъ отъ класса или опередившихъ его, учениковъ, и г) добиться болѣе вдумчиваго, чѣмъ обыкновенно наблюдаемое, отношенія учениковъ къ задачамъ и ихъ внутреннему содержанію. Работа учениковъ надъ преобразованіемъ неприведенныхъ задачъ въ приведенныхъ должна отличаться строгой постепенностью и быть для учениковъ посильною. (Въ задачникахъ, приспособленныхъ къ требованіямъ, выраженнымъ въ настоящей книгѣ, не предлагаются задачи исключительно приведенныя, такъ какъ это только стѣснило бы учителя). Отъ учителя зависитъ чередованіе приведенныхъ и неприведенныхъ задачъ, предпочтительное вниманіе къ задачамъ того или другого вида, и т. п. Только съ классомъ, совсѣмъ не пріобрѣтшимъ должнаго навыка въ рѣшеніи неприведенныхъ задачъ, приходится болѣе или менѣе долго стоять на рѣшеніи задачъ приведенныхъ. Въ этомъ случаѣ приспособленіе задачъ къ имѣющимся въ классѣ навыкамъ отнюдь не является безполезною тратою времени, а наоборотъ—должнымъ образомъ подготовляетъ классъ къ уразумѣнію способовъ преобразованія задачъ въ приведенныя и къ умѣнію *справляться* съ задачами. Эта подготовительная работа развязываетъ ученикамъ руки и уясняетъ имъ—въ чемъ состоитъ искусство рѣшенія сложныхъ задачъ. Если кто владѣетъ умѣніемъ сближать условія, приводящія къ цѣлесообразному дѣйствію,—притомъ сближать не по правилу, а изобрѣтеніемъ (путемъ эвристическимъ), то никакая сложная ариѳметическая задача, какъ бы перепутаны ни были ея условія, не будетъ въ состояніи противопоставить рѣшающему такихъ препятствій, которыхъ онъ не былъ бы въ состояніи преодолѣть.—Задачи, требующія болѣе четырехъ или пяти дѣйствій, слѣдовало бы исключить изъ курса ариѳметики. Онѣ и неестественны, и безполезны.

§ 25. Задачи съ не слишкомъ многочисленными условіями, для рѣшенія ихъ путемъ аналитическимъ, не цѣлесообразны. Задачи же съ многочисленными условіями, если онѣ принадлежатъ къ числу неприведенныхъ, чаще всего выходятъ далеко за предѣлы цѣлей обученія дѣтей ариѳметикѣ, какъ таковой. Это, вѣдь, учебный предметъ, истинное содержаніе котораго вполнѣ исчерпывается ученіями о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми и дробными числами и о примѣненіи ихъ къ случаямъ, не представляющимъ никакихъ особенныхъ логическихъ трудностей. Аналитическій способъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ состоитъ, какъ извѣстно, въ томъ, что, исходя изъ вопроса задачи, мы, пользуясь общими соображеніями, притомъ соотвѣтствующими даннымъ предложенной намъ задачи, устанавливаемъ, какія два числа надо знать для разрѣшенія этого вопроса. Когда это установлено, мы обращаемся къ каждому изъ этихъ двухъ чиселъ въ отдѣльности и разсматриваемъ, дано-ли хоть одно изъ нихъ въ нашей задачѣ, и если ни одно изъ нихъ въ нашей задачѣ не дано или не дано только одно изъ нихъ, мы предлагаемъ себѣ новый вопросъ: какія два новыхъ числа надобно знать для того, чтобы найти новое искомое число. Продолжая тотъ же процессъ далѣе, мы, наконецъ, приходимъ къ двумъ вопросамъ, для разрѣшенія которыхъ у насъ въ задачѣ даны два условія съ извѣстными числовыми данными. Когда весь этотъ анализъ законченъ, мы можемъ установить планъ рѣшенія предложенной задачи, идя въ нисходящемъ порядкѣ, а именно задавая себѣ рядъ новыхъ вопросовъ примѣрно слѣдующаго рода: зная такое-то число и такое-то число, что мы можемъ послѣ этого узнать? а зная это новое число и еще нѣкоторое число, что мы можемъ послѣ этого узнать? и т. д. Этотъ планъ приведетъ насъ къ ряду дѣйствій, подлежащихъ выполненію. Первое изъ этихъ дѣйствій будетъ совершено надъ нѣкоторыми извѣстными намъ числами, второе—надъ нѣкоторыми другими двумя извѣстными намъ числами, данными въ задачѣ, или же надъ только-что опредѣленнымъ нами результатомъ и однимъ изъ данныхъ въ задачѣ чиселъ, и т. д. Въ концѣ концовъ, мы произведемъ дѣйствіе надъ нѣкоторыми двумя числами, изъ которыхъ только одно можетъ принадлежать къ числу данныхъ намъ въ задачѣ чиселъ, другое же должно быть непремѣнно въ числѣ результатовъ, отысканныхъ нами ранѣе. Аналитическій способъ рѣшенія слишкомъ сложныхъ ариѳметическихъ задачъ низводитъ урокъ ариѳметики на степень урока, совершенно неинтересной для дѣтей и неважной для умственнаго развитія учениковъ, ариѳметической діалектики. Къ тому же, чисто-аналитическій пріемъ рѣшенія сложныхъ ариѳметическихъ задачъ ученикамъ представляется крайне искусственнымъ, каковымъ его и нельзя

Способы рѣшенія: синтетическій и аналитическій.

не признать, по крайней мѣрѣ, съ точки зрѣнія его построенія и того количества труда, которое затрачивается на усвоеніе этого пріема и которое рѣдко окупается результатами. Практика показываетъ, что даже у очень опытныхъ учителей лишь весьма немногіе ученики научаются проводить анализъ вполнѣ увѣренно и цѣлесообразно. Чаще всего ученики, добравшись путемъ анализа до какого-нибудь результата, дѣйствительно въ задачѣ важнаго и господствующаго, остальное дѣлаютъ уже путемъ изобрѣтательнымъ, эвристическимъ, не имѣя терпѣнія довести анализъ до его логически совершеннаго конца. Этому не только не должно препятствовать, но даже невозможно не сочувствовать: такое отношеніе учениковъ къ дѣлу свидѣтельствуетъ только объ ихъ, заслуживающемъ всяческаго поощренія, уваженіи къ здравому смыслу и къ свободному отъ излишнихъ правилъ, но здравому сужденію.

Другой способъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ (чисто-синтетическій), какъ извѣстно, исходитъ не изъ вопроса задачи, а прямо изъ условій ея. Примѣняя этотъ способъ, мы прежде всего стараемся какъ слѣдуетъ, понять условія задачи, и во всякомъ случаѣ, стараемся объ этомъ болѣе, чѣмъ при примѣненіи способа аналитическаго, въ которомъ уразумѣніе условій задачи идетъ почти рядомъ съ отысканіемъ всѣхъ ступеней анализа. Затѣмъ мы, путемъ почти непосредственнаго усмотрѣнія, начинаемъ пользоваться условіями такимъ образомъ, что иногда шагъ за шагомъ, а иногда почти мгновенно, въ нашемъ умѣ возникаетъ мысль о планѣ рѣшенія, который бѣгло можетъ быть нами формулированъ въ такой формѣ: сначала мы узнаемъ то-то, а потомъ то-то, далѣе то-то и то-то, и т. д. Когда планъ рѣшенія возникъ въ нашемъ воображеніи, мы приступаемъ уже къ рѣшенію задачи. Задачи не особенно сложныя большею частью рѣшаются путемъ синтетическимъ болѣе или менѣе быстро, въ то время какъ примѣненіе къ нимъ аналитическаго пріема, какъ это замѣчено выше, отличается чрезвычайною искусственностью. Пользуясь же аналитическимъ пріемомъ, мы прибѣгаемъ преимущественно къ сужденію и умозаключенію. Избѣгая почему-либо аналитическаго пріема, т. е. избѣгая его,—потому ли, что мы имъ не достаточно владѣемъ, или потому, что мы надѣемся на свою изобрѣтательность,— мы пользуемся соображеніемъ, случайною находчивостью, свойственными, въ большей или меньшей степени, каждому человѣку. Въ чистой своей формѣ, синтетическій пріемъ рѣшенія задачъ требуетъ быстрой оцѣнки двухъ условій вопроса, который можетъ быть разрѣшенъ на основаніи этихъ двухъ условій, и того, насколько отвѣтъ на этотъ вопросъ нуженъ намъ для рѣшенія главнаго вопроса задачи. Результаты дѣйствій здѣсь могутъ быть обозначены буквами, но значеніе ихъ будетъ, какъ это замѣчено и выше, всегда чисто служебнымъ.

Слишкомъ строгое, т. е. педантическое, слѣдованіе одному аналитическому способу рѣшенія задачи приводитъ къ результатамъ часто плачевнымъ. По винѣ этого способа, многіе уроки ариѳметики обращаются въ уроки ариѳметической діалектики, и главное вниманіе переносится съ ариѳметической на чисто-діалектическую почву. Ученики перестаютъ охотно и съ интересомъ заниматься ариѳметикою вообще, отожествляя ее съ задачами, и тѣмъ самымъ въ основѣ разрушаютъ возможность будущихъ въ этомъ предметѣ успѣховъ.

§ 26. Если приходится остановиться непремѣнно на одномъ изъ способовъ рѣшенія сложныхъ задачъ (на аналитическомъ или на синтетическомъ), то практика склоняется скорѣе въ пользу способа синтетическаго. Къ этому должно присовокупить, что крайне важенъ тотъ путь, по которому надо вести учениковъ для того, чтобы для нихъ синтетическое рѣшеніе всякихъ задачъ было дѣломъ не слишкомъ труднымъ, достаточно интереснымъ, и не идущимъ, въ то же время, въ разрѣзъ съ цѣлями обученія ариѳметикѣ, какъ таковой. Этотъ путь можетъ быть найденъ только въ томъ случаѣ, если учитель сначала будетъ рѣшать съ дѣтьми только задачи приведенныя и постепенно будетъ, сообразно съ силами своихъ учениковъ, пріучать ихъ къ преобразованію всякой сложной неприведенной ариѳметической задачи въ приведенную. Сначала учителю придется рѣшать съ дѣтьми только приведенныя задачи, затѣмъ перерѣшить съ ними нѣкоторыя или всѣ задачи („Задачника для учениковъ“, подъ №№ 270з) въ приведенномъ видѣ, а затѣмъ уже предложить имъ хотя бы тѣ же задачи въ видѣ неприведенномъ (но съ сохраненіемъ порядка условій, принятыхъ въ „Задачникѣ для уч—ковъ“) и, наконецъ, предложить для самостоятельнаго разрѣшенія другія задачи. Каждую задачу своевременно можно выразить въ совершенно приведенномъ видѣ, въ видѣ менѣе приведенномъ и, наконецъ, въ видѣ совсѣмъ не приведенномъ.—Преимущества синтетическаго способа сводятся главнымъ образомъ къ тому, что, пользуясь имъ, ученики пользуются въ полной мѣрѣ своею изобрѣтательностью, находчивостью, смѣтливостью, и не стараются (какъ это наблюдается при пользованіи аналитическимъ способомъ) слѣдовать разъ-навсегда принятымъ образцамъ и правиламъ. Это полезнѣе и въ смыслѣ развитія въ дѣтяхъ самодѣятельности, и въ смыслѣ пріобрѣтенія ими пріемовъ мышленія достаточно логичныхъ, но не слишкомъ отвлеченныхъ, для большинства учениковъ не посильныхъ и не занимательныхъ.

Пріученіе къ синтетическому способу.

§ 27. Съ этимъ соприкасаются три вопроса: а) можно ли умѣнію учениковъ разрѣшать слишкомъ сложныя чисто-ариѳметическія задачи съ многочисленнѣйшими и перепутанными условіями придавать значеніе мѣрила дѣйствительныхъ успѣховъ дѣтей въ ариѳметикѣ? б) можно ли считать удовлетворительными успѣхи той школы, въ которой ученики умѣютъ разрѣшать непремѣнно всѣ задачи принятаго тамъ сбор-

Истинное мѣсто сложныхъ задачъ въ курсѣ.

ника задачъ, не вполнѣ удовлетворяя требованіямъ вѣрности, сознательности, быстроты и изящества производимыхъ вычисленій? в) надо ли, наоборотъ, считать успѣхи въ той школѣ неудовлетворительными, въ которой дѣти не умѣютъ быстро, чисто-аналитическимъ или чисто-синтетическимъ способомъ, „распутывать“ слишкомъ сложныя изъ числа чисто-ариѳметическихъ задачъ, но зато умѣютъ вѣрно, быстро, сознательно и изящно производить всяческія вычисленія и съ разумѣніемъ рѣшать сложныя ариѳметическія задачи съ не слишкомъ многочисленными условіями?— Отвѣты на эти вопросы могутъ быть даны только съ точки зрѣнія истинныхъ (образовательной и практической) цѣлей обученія ариѳметикѣ, въ каковыя цѣли рѣшеніе всѣми учениками слишкомъ сложныхъ и запутанныхъ задачъ, конечно, входить не можетъ. Не можетъ въ эти цѣли входить, конечно, и перенесеніе центра тяжести обученія изъ области примѣненія четырехъ дѣйствій къ случаямъ, встрѣчающимся въ жизни, въ область исключительно-діалектическаго отношенія къ числовымъ вопросамъ, какъ бы нарочно для затрудненія учениковъ придуманнымъ и запутаннымъ. Ибо истинная цѣль обученія ариѳметикѣ—двоякая: 1) практическая (дѣти должны научиться сознательному, вѣрному, быстрому и изящному производству четырехъ дѣйствій надъ числами и вѣрному примѣненію ихъ къ рѣшенію простыхъ и не слишкомъ сложныхъ задачъ), и 2) образовательная (ученики должны, благодаря своимъ занятіямъ ариѳметикою, пріобрѣсти тѣ полезные умственные навыки и точныя понятія, которые могутъ и должны быть пріобрѣтены при достиженіи ими практической цѣли ихъ занятій этимъ предметомъ).

Наименованіе чиселъ. § 28. Записываніе наименованія данныхъ и искомыхъ чиселъ должно подчинять и требованіямъ здравому смыслу, и требованіямъ смысла производимаго дѣйствія. Такъ, при умноженіи множитель, а дѣлитель при производствѣ дѣленія на извѣстное число частей, и отношеніе при производствѣ кратнаго сравненія, т. е. дѣленія на извѣстныя части, не могутъ быть по самому существу дѣла, снабжаемы никакимъ наименованіемъ, такъ какъ эти числа принадлежатъ къ разряду существенно-отвлеченныхъ. Равнымъ образомъ не надо допускать, чтобы дѣти говорили, что, напр., надобно помножить рубли на четверти или копейки на аршины. Но, во избѣжаніе слишкомъ сложнаго способа выраженія (то-есть: надобно помножить стоимость аршина сукна на число аршинъ, или вѣсъ куля ржи на

число кулей, и т. п.), гораздо лучше требовать отъ дѣтей не отвлеченной формулировки подобныхъ дѣйствій, а прямого указанія на то, что въ данномъ случаѣ надо, напр., 3 р. 50 к. помножить на 15, или 9 пуд. помножить на 26, и т. д. Хотя каждый урокъ ариѳметики и долженъ быть въ то же время урокомъ роднаго языка, но изощреніе дѣтей въ употребленіи подобныхъ вышеприведеннымъ, искусственныхъ и для нихъ слишкомъ книжныхъ, отвлеченныхъ выраженій выходитъ за предѣлы цѣлей обученія ариѳметики и даже за предѣлы возможныхъ, въ отношеніи точности рѣчи, требованій курса. Снабженіе слагаемыхъ и суммы, уменьшаемаго, вычитаемаго и остатка наименованіями не содержитъ въ себѣ ничего предосудительнаго. Даже въ томъ случаѣ, когда задача требуетъ перемѣны наименованія, эта перемѣна можетъ быть сдѣлана вполнѣ логично. Напр., предложена задача: „у одного помѣщика пять лошадей; у другого помѣщика коровъ на шесть больше, чѣмъ у перваго лошадей; сколько коровъ у второго помѣщика?“ Здѣсь нѣтъ надобности къ лошадямъ прибавлять коровъ, да это и не логично. У второго помѣщика, очевидно, столько же коровъ, сколько у перваго лошадей (т. е. 5 головъ), да еще 6; дѣйствіе можетъ быть обозначено и такъ: $5 + 6 = 11$, и иначе: 5 кор. $+$ 6 кор. $=$ 11 кор. Конечно, дѣйствіе надъ отвлеченными числами логичнѣе, а потому и самая запись безъ наименованія изящнѣе. Но придавать этому изяществу записи слишкомъ большое значеніе не слѣдуетъ. Еще меньшимъ изяществомъ, конечно, обладаютъ записи:

$$5 \text{ кор.} \times 8 = 40 \text{ кор.};\quad 8 \text{ лош.} : 2 = 4 \text{ лош.}$$ и т. п.

Но не изящны и общепринятыя записи:

$$7 \text{ руб.} \times 3 = 21 \text{ р.};\quad 8 \text{ коп.} : 2 = 4 \text{ коп.};\quad 15 \text{ коп.} : 5 \text{ коп.} = 3.$$

На первыхъ порахъ, въ особенности въ одноклассной начальной школѣ, въ приготовительныхъ классахъ и вообще при обученіи малолѣтнихъ, нельзя ничего имѣть противъ подобныхъ, чисто-условныхъ, записей. Съ осторожностью за-то надо относиться къ наименованію, когда этого наименованія ни писать, ни даже произносить не надо: мы говоримъ о тѣхъ ошибкахъ, которыя дозволяютъ себѣ ученики, говоря, что надо рубли помножить на десятины, или рубли раздѣлить на кули, и т. д. Ср. § 15 гл. V-ой.

Введеніе и основныя ариѳметическія понятія. § 29. Когда весь курсъ пройденъ, можно позаняться содержаніемъ „введенія“ въ принятый учеб-

(напр., въ „Ариѳметику для нач. школъ“). Надо при этомъ помнить, что введенія въ учебники ариѳметики вообще содержатъ въ себѣ крайне отвлеченный матеріалъ. Къ счастію, многія изъ тѣхъ опредѣленій, которыми обыкновенно переполняются введенія, не нужны и, большей частію, къ тому же недоступны разумѣнію учениковъ. Таковы, напр., опредѣленія понятій о величинѣ, объ единицѣ, о числѣ, объ отвлеченномъ числѣ, и т. п.—Упражненія въ усвоеніи учениками содержанія введенія могутъ итти въ слѣдующемъ, примѣрно, порядкѣ:

Что значитъ считать. Всякій ли человѣкъ умѣетъ считать? (Всякій)...—А сказать—что значитъ считать вы не умѣете: всякій знаетъ—что это значитъ, но сказать, что это значитъ—никто изъ васъ, какъ слѣдуетъ, не можетъ...—Что значитъ одинъ?.. (тоже никто не можетъ, какъ слѣдуетъ, сказать).—А что значитъ два? (Два это значитъ одинъ да еще одинъ)...—А что значитъ три? (Три—это два да еще одинъ)...—Четыре? Пять?.. Десять? Одиннадцать?.. Двадцать? (Двадцать это значитъ 19 да еще одинъ, или же два раза 10)...—Двадцать четыре? (Двадцать четыре—это двадцать да еще четыре)...

Число. Каждое изъ словъ: „одинъ“, „два“, „три“ и т. д. до слова „двадцать“, далѣе каждыя два слова: „двадцать одинъ“, „двадцать два“, „двадцать три“, и т. д. до словъ „двадцать девять“, слова „тридцать“, „сорокъ“ и „пятьдесятъ“ и т. д. до слова „сто“, и каждая пара словъ „тридцать одинъ“, „тридцать два“, „сорокъ одинъ“ „сорокъ два“ и т. д. обозначаютъ числа...—Точно также каждыя два слова: „сто одинъ“, „сто два“, „сто три“ и т. д. и каждыя три слова: „сто двадцать одинъ“, „сто двадцать два“ и т. д., тоже обозначаютъ числа...—Что такое число—знаетъ всякій, и не для чего объяснять значеніе этого слова!..

Какъ надо считать? Какъ сосчитать большое число предметовъ, напр., кусковъ бумаги? *)...—Лучше всего это сдѣлать такъ: разложить эти кусочки (бумажки) въ отдѣльныя кучки по десяти кусковъ въ каждой, потомъ—десять кучекъ соединить въ одну большую отдѣльную кучу, далѣе еще десять отдѣлить въ другую кучу и т. д. Въ каждой большой кучѣ будетъ по сто штукъ и т. д. **).

*) Учитель долженъ аккуратненько нарвать изъ листа бумаги значительное количество правильныхъ кусочковъ бумаги.

**) Все это ученику надо хоть разъ сдѣлать на самомъ дѣлѣ.

Предметное число. Мы можемъ считать предметы: столы, стулья, черточки, буквы, страницы, яблони...—Мы можемъ сосчитать людей: учениковъ, солдатъ, жителей въ деревнѣ...—Мы можемъ считать явленія...—Все, что дѣлается, совершается на свѣтѣ,—громъ, молнія, дождь, выстрѣлъ, звукъ...—называется явленіемъ...—Примѣры: двадцать семь учениковъ, восемнадцать стеколъ, тридцать одинъ выстрѣлъ... пятнадцать словъ, двадцать морозныхъ дней—наз. безразлично предметными числами.

Единицы мѣры и величины. Аршинъ, вершокъ, футъ, дюймъ, сажень, верста, миля, линія—единицы мѣры для длины и разстояній...—Длина и разстояніе—величина...—Фунтъ, лотъ, доля, золотникъ, пудъ, берковецъ—единицы мѣры для вѣса предметовъ...—Вѣсъ предметовъ—величина...—Копейка и рубль, полуимперіалъ, имперіалъ—единицы мѣры для стоимости, цѣны, цѣнности предметовъ...—Стоимость, цѣнность предметовъ—величина...—Четверикъ, четверть и гарнецъ—единицы мѣры для количества сыпучихъ предметовъ (ржи, муки, овса, крупы)...—Количество сыпучаго вещества—величина...—Ведро, бочка, бутылка, стаканъ, чарка—единицы мѣры для количества жидкихъ тѣлъ.—Квадратный аршинъ, кв. футъ и т. д.—единицы мѣры для площадей.—Площадь фигуры—величина...—Кубическій футъ, кубическій аршинъ и т. д.—единицы мѣры для объемовъ тѣлъ и емкости сосудовъ...—Объемъ и емкость—величина...—Нѣтъ ли еще какихъ-либо единицъ мѣры?...—Кто знаетъ?.. (Есть: для времени—часы, минуты, годъ, мѣсяцъ, недѣля, вѣкъ)...—Еще! (Для количества бумаги: стопа, десть, листъ)...—Промежутокъ времени—величина... — Количество бумаги—величина...

Измѣреніе данныхъ величинъ. Можно-ли узнать—какъ велика длина этого стола?..—Что для этого надо сдѣлать?..—Измѣрить длину этого стола значитъ узнать—сколько въ этой длинѣ содержится аршинъ, вершковъ...—Что значитъ измѣрить: вѣсъ куска говядины? объемъ бревна? емкость боченка? продолжительность промежутка времени? площадь листа бумаги? площадь участка земли? разстояніе между двумя деревнями?...—Что значитъ измѣрить данную величину? (Измѣрить данную величину значитъ узнать—сколько въ ней единицъ мѣры, подходящихъ для этой величины).

Простое именованное число. Если мы измѣрили длину какого-нибудь предмета и узнали, что эта длина равна 15-ти верш-

камъ, то длина эта иначе называется именованнымъ числомъ...—18 верстъ, 29 рублей, 137 кв. футовъ, 417 ведеръ, 356 четвертей, 436 куб. арш...—именованныя числа...—Всякое число какихъ угодно единицъ мѣры, употребляемыхъ для измѣренія какихъ-нибудь величинъ—именованное число...—Если числительное имя снабжено наименованіемъ единицы мѣры, то этимъ числительнымъ именемъ выражено число именованное...—15 булокъ—число не именованное (а предметное)...—Почему? (Потому что булка—не единица мѣры для измѣренія какихъ-либо величинъ, булка—предметъ)...—15 верстъ—число именованное...

Единичное отношеніе. Въ сажени 3 аршина; число 3 называется въ этомъ случаѣ единичнымъ отношеніемъ сажени къ аршину...—Въ сажени 7 футовъ; число 7—единичное отношеніе...—Въ аршинѣ 16 вершковъ.—Въ футѣ 12 дюймовъ.—Въ аршинѣ 28 дюймовъ.—Въ метрѣ сто центиметровъ, и т. д.

Составное именованное число. 15 арш. 7 вершковъ—длина, которую называютъ составнымъ именованнымъ числомъ...—15 аршинъ 7 вершковъ—правильное составное именованное число; 15 арш. 27 вершковъ—неправильное...—Почему? (Потому что 27 вершковъ болѣе аршина и, стало быть, у насъ не 15, а 16 арш. и еще...?)...—15 ф. 27 лотовъ—правильное составное именованное число, а 15 фунтовъ 37 лотовъ—неправильное...—Когда говорятъ о составныхъ именованныхъ числахъ, то при этомъ имѣются въ виду чаще всего правильныя составныя именованныя числа...—Измѣримъ длину стола (или веревочки) футомъ, остатокъ дюймомъ, новый остатокъ линіей...—Положимъ, что мы взвѣсили мѣшокъ съ картофелемъ...—Когда получается составное именованное число? (Когда мы измѣримъ какую-либо величину наибольшею, какая только возможна въ этомъ случаѣ, единицею мѣры, когда при этомъ получится остатокъ, меньшій, чѣмъ эта единица, и когда мы этотъ остатокъ измѣримъ слѣдующею меньшею, чѣмъ первая единица мѣры, но наибольшею, какая только возможна въ данномъ случаѣ, единицею мѣры и т. д., то получится правильное составное число... *).

Раздробленіе именованныхъ чиселъ. Что называется раздробленіемъ именованнаго числа? (Раздробить именованное число значитъ замѣнить это именованное число другимъ, равнымъ ему, но выраженнымъ въ единицахъ низшаго наименованія)...—Примѣры на раздробленіе простого и на раздробленіе составного именованнаго числа!—Что называется превращеніемъ простого именованнаго числа? (Превратить простое именованное число значитъ замѣнить его другимъ, равнымъ ему, но выраженнымъ въ видѣ составного именованнаго числа).

*) Конецъ веревки или тесемки долженъ быть приготовленъ учителемъ такой длины, чтобы можно было и ему самому показать, въ чемъ дѣло, и ученикамъ поупражняться въ этомъ направленіи.

Отвлеченное число. Давайте считать: одинъ, два, три...—Каждое изъ этихъ словъ что обозначаетъ? (Каждое обозначаетъ какое-нибудь число)...—Если, до поры до времени, неизвѣстно какія единицы считаны, то число наз. отвлеченнымъ...

Десятокъ, сотня, тысяча, единица. Десять единицъ составляютъ одинъ десятокъ...—Десять десятковъ составляютъ одну сотню...—Десять составляютъ одну тысячу...—А что единица? (Это знаетъ всякій, и объяснять это слово не для чего, да и невозможно объяснить это какъ слѣдуетъ).

Письменная нумерація или счисленіе двузначныхъ чиселъ. Какъ обозначаются числа, меньшія десяти, на письмѣ?...—Какъ наз. эти знаки? (Цифрами)...—Какая еще есть цифра? (Нуль).—Какъ она пишется?—Какъ обозначаются числа, большія десяти, но меньшія двадцати?—Какъ обозначается десять? Двадцать?—Какія числа называются двузначными? (Числа, большія девяти, но меньшія сотни)...—Какъ обозначаются на письмѣ двузначныя числа?...—Какія числа называются трехзначными? (Числа отъ ста до девяти-сотъ девяноста девяти включительно)...—Какъ на письмѣ обозначаются трехзначныя числа?... (Отвѣтъ по учебнику).—Почему числа, большія девяти и меньшія ста, наз. двузначными?

Трехзначныя числа.

Единица 2-го, 3-го и 1-го разрядовъ. Десятокъ называется также единицею второго разряда...—Сотня называется единицею третьяго разряда...—Простая единица называется единицею перваго разряда...

Единица второго класса. Тысяча состоитъ изъ сколькихъ сотенъ?...—Тысяча называется единицею четвертаго разряда или-же, по отношенію къ простой единицѣ, единицею второго класса...—Десять единицъ какого-либо разряда называются единицею слѣдующаго по порядку разряда; десять единицъ 2-го разряда—единицею 3-го разряда, десять единицъ 4-го разряда—единицею 5-го разряда, и т. д.—Тысяча простыхъ единицъ называется единицею второго класса; простая же единица—единицею перваго класса...

Единица третьяго класса. Тысяча единицъ второго класса, т. е. тысяча тысячъ, называется или милліономъ, или же единицею третьяго класса.

Нумерація чиселъ четырехзначныхъ, пятизначныхъ и шестизначныхъ. Какія числа называются четырехзначными? (Числа, большія 999-ти и меньшія десяти тысячъ)...—Какъ на письмѣ обозначаются числа четырехзначныя, пятизначныя и шестизначныя? (Сначала записываютъ, по правилу обозначенія однозначныхъ, двузначныхъ или трехзначныхъ чиселъ, сколько всего тысячъ въ этомъ числѣ, оставляютъ промежутокъ шириною въ одну цифру, а затѣмъ по порядку, справа, записываютъ — сколько въ немъ отдѣльныхъ сотенъ, десятковъ и единицъ)...—А если отдѣльныхъ единицъ какого-либо изъ этихъ разрядовъ нѣтъ? (Тогда пишутъ на мѣстѣ единицъ этого разряда нуль)...

Величина милліона. Большое ли число милліонъ?—Какъ вы думаете: много ли надо времени, чтобы написать аккуратненько,—но не очень медленно, а такъ, какъ мы обыкновенно пишемъ,—какую-нибудь букву, напр., букву *и*, милліонъ разъ?... (Дѣти на этотъ вопросъ между собою не согласны и отвѣчаютъ весьма различно: одинъ скажетъ, что на милліонъ буквъ понадобится часъ, другой—пять часовъ, и т. д. Надо на дѣлѣ, съ часами въ рукахъ, въ теченіе одной минуты, писать на доскѣ *и*, но не очень медленно, дабы ученики не имѣли основаній къ упреку. Окажется, что въ минуту даже ста буквъ не написать).—Считая по сту буквъ въ минуту, узнаемъ, сколько минутъ потребуетъ одинъ милліонъ буквъ?...—Для этого надо раздѣлить 1 000 000 на 100. Получимъ 10 000 минутъ!—Сколько здѣсь часовъ? (166 ч. и 40 минутъ).—Сколько здѣсь сутокъ, считая дни и ночи? (Шестеры сутки 22 ч.)...—Сколько, стало-быть, надобно времени, чтобы написать одинъ милліонъ *и*, считая, что въ минуту можно написать 100 буквъ? (Шестеры сутки 22 часа и 40 минутъ)...—Что это значитъ?.. (Это значитъ, что если начать писать буквы въ 12 часовъ ночи съ воскресенья на понедѣльникъ, то придется писать не переставая, весь понедѣльникъ, вторникъ, среду, четвергъ (дни и ночи), пятницу и субботу (всего шестеры сутки), да ужъ захватить и все воскресенье (съ 12-ти часовъ ночи съ субботы на воскресенье), за вычетомъ одного часа и 20 минутъ, которыя останутся до полуночи съ воскресенья на понедѣльникъ.)—Милліона буквъ сподрядъ, безъ передышки, никто написать не можетъ.

Обозначеніе милліоновъ. Милліонъ—единица третьяго класса...—Какого правила держатся при обозначеніи милліоновъ? (Того же, что при обозначеніи тысячъ: сначала записываютъ, сколько милліоновъ,—ихъ не можетъ быть болѣе 999-ти,—потомъ оставляютъ промежутокъ, затѣмъ записываютъ,—сколько всѣхъ единицъ второго класса, наконецъ,—сколько единицъ перваго класса)...

Единица четвертаго класса. Тысяча милліоновъ называется биллліономъ, или милліардомъ...—Это—единица четвертаго класса...—Какъ вы думаете, часто ли въ жизни встрѣчаются билліоны? (Нѣтъ!)...—Чтобы написать билліонъ разъ букву *и*, надо писать 19 лѣтъ сподрядъ, дни и ночи: безъ отдыха, безъ сна, пищи и питья...—Провѣрить это вычисленіемъ!

(Полезно на этой ступени заставить учениковъ вычислить—сколько верстъ займутъ 1 000 000 человѣкъ, поставленныхъ гуськомъ, если считать, что человѣку нужно только полъ-аршина мѣста на землѣ, и т. п.).

Единицы высшихъ классовъ и ариѳметика. Единицы дальнѣйшихъ разрядовъ и классовъ не только въ жизни не встрѣчаются, но даже въ наукахъ встрѣчаются крайне рѣдко...— Отъ Рождества Христова до сихъ поръ прошло сколько дней?.. — Въ году сколько минутъ?...—Въ Россіи сколько жителей? (около 150 милліоновъ)...—Названія единицъ слѣдующихъ классовъ: триллліонъ, квадрилліонъ; но въ нихъ нѣтъ никакой надобности...—Напишите рядъ слѣдующихъ цифръ:

23 134 718 635 750 636 845 376 503.

Прочесть этого числа не можемъ, а ужъ о томъ, чтобы представить себѣ — какъ оно велико, и говорить нечего!... — Мы и величины милліона представить себѣ не можемъ... — А кто представитъ себѣ—какъ велика длина въ тысячу вершковъ? (Никто изъ насъ!)...—Дѣйствія же производить умѣемъ!...—Разсчитать можемъ что угодно!—Узнать, сколько въ написанномъ числѣ линій—верстъ, или въ такомъ числѣ секундъ сколько лѣтъ?—Этому ариѳметика учитъ—какъ обозначать числа и какъ производить дѣйствія надъ ними.

Характеръ курса 3-года. § 30. Весь курсъ третьяго года въ одноклассной начальной школѣ можетъ, при благопріятныхъ условіяхъ, преслѣдовать троякую цѣль: а) болѣе глубокое проникновеніе учениковъ въ сущность ариѳметическихъ дѣйствій и ихъ внутренній смыслъ, б) дополненіе ариѳметическихъ по-

знаній учениковъ нѣкоторыми упражненіями надъ дробными числами, и в) пріобрѣтеніе учениками большаго навыка въ рѣшеніи задачъ нѣкоторыхъ особыхъ родовъ. Но чаще всего первая и третья цѣли не вполнѣ достижимы: ученики, съ несоразмѣрною съ полученными результатами затратою труда, едва усваиваютъ себѣ такъ наз. „теоретическіе“ элементы курса (опредѣленія, правила и т. п.) и очень не твердо усваиваютъ себѣ способы рѣшенія задачъ на сложное тройное правило и замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера. Гораздо цѣлесообразнѣе посвящать третій годъ обученія усвоенію прочныхъ и стойкихъ навыковъ: а) въ изустныхъ вычисленіяхъ, относящихся до денежныхъ житейскихъ разсчетовъ, б) въ вычисленіяхъ на счетахъ, в) въ письменныхъ вычисленіяхъ надъ многозначными числами, г) въ переводѣ мѣръ обыкновенныхъ въ мѣры метрическія и обратно, и д) въ вычисленіяхъ надъ дробными числами, конечно, не выходящихъ за предѣлы житейскихъ интересовъ. Въ школахъ съ четырехгодичнымъ, при двухъ учителяхъ, курсомъ (такъ называемыхъ „двухкомплектныхъ“) усвоеніе учениками теоретическихъ элементовъ курса и способовъ рѣшенія задачъ на сложное тройное правило и замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера (разъ ужъ отъ нихъ совсѣмъ отказаться нельзя) должны быть отнесены къ курсу 4-го года обученія. Во всякомъ случаѣ, „метода цѣлесообразныхъ задачъ“ и въ этомъ курсѣ примѣнима во всей ея силѣ и во всемъ ея значеніи: даже при выработкѣ опредѣленій дѣло начинается съ многочисленныхъ цѣлесообразныхъ задачъ. Но средствомъ обученія могутъ служить въ намѣченномъ курсѣ не только задачи и численные примѣры, а также учебникъ. Изъ наглядныхъ пособій употребляются весьма немногія, но тѣмъ большее значеніе должно быть придаваемо воздѣйствію на воображеніе: безъ этого воздѣйствія очень много учебнаго матеріала окажется либо совсѣмъ не усвоеннымъ, либо же для учениковъ мало занимательнымъ. (Ср. §§ 4—9, 11, 14, 17 и др.). Увлеченіе исключительно рѣшеніемъ замысловатыхъ задачъ въ курсѣ третьяго года можетъ очень вредно повліять на цѣлостность этого курса. Можетъ въ лучшемъ случаѣ оказаться, что ученики многое изъ ариѳметики позабудутъ и научатся только рѣшать нѣкоторыя особенныя задачи, весьма мало относящіяся къ самому предмету ариѳметики. Но можетъ случиться и еще худшее: ученики, не пріобрѣтши твердыхъ ариѳметическихъ познаній, разучатся справляться съ задачами, требующими прежде всего умѣнія

вѣрно и быстро производить четыре дѣйствія, и почти совсѣмъ не научатся разбираться въ задачахъ особенныхъ родовъ. Въ высшей степени вредно на дѣлѣ обученія ариѳметикѣ отзывается тотъ взглядъ на этотъ учебный предметъ, при которомъ онъ какъ бы отожествляется съ рѣшеніемъ задачъ болѣе или менѣе сложныхъ, замысловатыхъ. Нерѣдко это смѣшеніе понятій идетъ такъ далеко, что учениковъ стараются научить рѣшенію подобныхъ трудныхъ задачъ, хотя бы они даже не вполнѣ свободно владѣли способами производства дѣйствій и не умѣли рѣшать задачи менѣе трудныя и чаще встрѣчающіяся въ жизни. При такомъ увлеченіи, нерѣдко можно натолкнуться на случаи, когда ученики умѣютъ разрѣшать задачи „на красное и синее сукно“ или о „бассейнахъ“, почти не будучи въ состояніи—сколько-нибудь быстро, увѣренно и изустно разсчитать, что стоятъ 95 аршинъ ситцу по $16\frac{1}{2}$ коп. за аршинъ, $12\frac{3}{4}$ фунта масла по 32 коп., 14 пудовъ зерна по 67 коп. за пудъ и т. п. Само собою разумѣется, что подобное несоотвѣтствіе между школою и потребностями жизни не цѣлесообразно и что всяческія увлеченія непримѣнимымъ въ жизни учебнымъ матеріаломъ въ благоустроенной начальной школѣ не заслуживаютъ никакого сочувствія.

Запись условій задачъ.

§ 31. Въ третій и даже во второй годъ обученія полезно пріучать, при рѣшеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, къ надлежащей записи условій задачъ на классной доскѣ. Заставивъ учениковъ положить на столъ задачникъ и приготовиться къ рѣшенію задачи, учитель обращается къ классу *): „разыщите стр. 125-ую.—Нашли?—Возьмемъ задачу подъ № 456...“ Учитель записываетъ нумеръ задачи на доскѣ слѣва въ верхнемъ углу доски, ученики—въ соотвѣтствующемъ мѣстѣ тетради, затѣмъ выразительно и внятно читаетъ задачу по книгѣ, выразительнымъ чтеніемъ не только добиваясь большаго воздѣйствія на воображеніе и разумѣніе учениковъ, но также сглаживая, съ его помощью, возможныя неровности изложенія задачи въ задачникѣ. Ученики слѣдятъ по своимъ книгамъ. Когда задача прочтена учителемъ или однимъ изъ учениковъ, ее читаетъ еще одинъ изъ учениковъ,—притомъ опять-таки съ должнымъ выраженіемъ и разумѣніемъ. Запись условій должна вестись выразительно, кратко и раздѣльно: должно записывать только существенное, точно оттѣняя—что именно

*) Тире обозначаетъ паузу, а многоточіе—повтореніе предшествующей фразы учителемъ или ученикомъ.

записывается и что мы надѣемся сохранить въ памяти. Если задача принадлежитъ къ числу неприведенныхъ, то можно, обращая ее въ приведенную, поставить надлежащую нумерацію условій, отмѣчая цифрами: 1), 2), 3), 4) и т. д. тотъ порядокъ, въ которомъ придется пользоваться условіями. Напр., пусть предложена задача (ср. съ предложенною на стр. 235): „Купецъ купилъ 4 партіи сахару по 4 руб. за пудъ; за перевозку онъ заплатилъ 507 р. 26 коп.; во всѣхъ четырехъ партіяхъ было 535 пудовъ; во второй было вдвое больше, чѣмъ въ 1-й, въ третьей на 32 пуда меньше, чѣмъ во второй, въ первой 86 пуд., въ четвертой—остальное; сахаръ первой партіи проданъ купцомъ по 5 руб. 10 коп. за пудъ, сахаръ второй—по 3 руб. 95 коп. за пудъ, а третьей—по 5 руб. 30 коп. за пудъ. Почемъ онъ продавалъ пудъ сахару четвертой партіи, если на всемъ сахарѣ получилъ прибыли среднимъ числомъ по 70 к. съ пуда?“ Записавъ условія и перенумеровавъ ихъ согласно требованіямъ условій приведенной задачи, получимъ слѣдующую запись (хорошо, если въ классѣ двѣ доски, на одной изъ которыхъ можно записывать только условія):

5) 4 партіи сахару;
7) по 4 рубля за пудъ;
8) за перевозку уплач. 507 р. 26 к.;
4) во всѣхъ парт. 535 пуд.;
2) во II вдвое б., ч. въ I;
3) въ III на 32 п. м., ч. во II;
1) въ I партіи 86 пуд.;
6) въ IV ост.;
9) I по 5 р. 10 к. за пудъ;
10) II „ 3 р. 95 к. „ „
11) III „ 5 р. 30 к. „ „
12) 70 к. съ пуда приб.

Почемъ прод. пудъ IV партіи?

Это перенумеровываніе условій, идущее рядомъ съ обращеніемъ предложенной задачи въ приведенную и съ установленіемъ плана рѣшенія, въ высшей степени упорядочиваетъ работу учениковъ. Повтореніе условій задачи можетъ практиковаться сначала по книжкѣ, а затѣмъ—сообразно съ порядкомъ перенумерованныхъ условій задачи, вносящимъ въ задачу больше прозрачности, здраваго смысла и ясности.

Повтореніе курса. § 32. Такъ называемое повтореніе курса въ начальной народной школѣ должно отличаться болѣе практическимъ направленіемъ, чѣмъ теоретическимъ. Поэтому часть каждаго урока должна быть посвящаема нѣкоторымъ, хотя бы и весьма немногочисленнымъ, изо дня въ день повторяющимся, упражненіямъ: а) въ сложеніи

и вычитаніи двузначныхъ чиселъ, б) въ изустномъ вычисленіи практическаго характера, относящемся до умноженія двузначнаго числа на однозначное (27 к. × 8; 39 к. × 7 и т. п.) и производимомъ способами, которые употребляются въ общежитіи, напр., такъ: 8 четвертаковъ все равно, что 4 полтинника или 2 р., да 8 разъ по 2 к., и т. п., в) въ умноженіи многозначнаго числа на однозначное, г) въ дѣленіи многозначнаго числа на многозначное. И т. п.

Если въ среднемъ или даже въ старшемъ отдѣленіи есть ученики, которые почему-либо своевременно не пріобрѣли въ чемъ-нибудь должнаго навыка, то надо этимъ ученикамъ или дать возможность какъ-нибудь наверстать упущенное, или же снабдить ихъ такимъ пріемомъ, который, не задерживая остальныхъ учениковъ, въ то же время далъ бы отставшему ученику возможность, производя данное упражненіе не по правилу, все-таки двигаться впередъ. Примѣръ: пусть какой-либо ученикъ недостаточно бѣгло дѣлаетъ сложеніе однозначныхъ чиселъ и затрудняется быстро и вѣрно въ сложеніи чиселъ

7+8+6+8+7+8+4+3+5.

Тогда ему надо разрѣшить производство сложенія съ помощью составленія цѣлыхъ десятковъ, т. е. ученикъ, указывая на цифру 7, долженъ произнести „семь“, показывая цифру 8, долженъ сказать „да еще три—десять, да еще пять—пятнадцать“, указывая на цифру 6, долженъ произнести „да еще пять—двадцать, да еще одинъ—двадцать одинъ“, далѣе, указывая на цифру 8, произнести „двадцать девять“, а указывая на 7, произнести „да еще одинъ—тридцать, да еще шесть—тридцать шесть“ и т. д.—Другой примѣръ: пусть ученикъ плохо производитъ вычитанія въ родѣ слѣдующихъ:

12—8, 16—9, 13—7 и т. п.;

тогда ученику надо разрѣшить то производство дѣйствія, которое лежитъ въ основѣ быстраго производства дѣйствія; т. е. для перваго вычитанія ученикъ долженъ сказать „12 долой два останется десять, долой еще 6, останется 4“ и т. п.—Только такая постановка дѣла, при которой каждаго ученика ставятъ въ условія, наиболѣе благопріятныя для восполненія пробѣловъ въ его познаніяхъ, возможно добиться того, чтобы неуспѣвающій или случайно отставшій ученикъ, не безъ пользы для класса, догналъ своихъ товарищей и не причислилъ себя къ числу неспособныхъ слѣдовать за ними. Вообще, повтореніе курса представляетъ собою опасность двоякаго рода: а) если оно ведется безъ всякаго вниманія къ тому, насколько ученики интересуются этими занятіями и насколько они хорошо или плохо знаютъ повторяемое, то оно, конечно, не приводитъ къ результатамъ потому, что оно для учениковъ неинтересно; б) если все повтореніе сводится къ чисто-словеснымъ упражненіямъ въ опредѣленіяхъ, въ произнесеніи правилъ и т. п., то оно не приноситъ никакой пользы потому, что при такомъ повтореніи работаетъ болѣе память словъ, а не умъ и ариѳметическое соображеніе.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Четвертый годъ обученія въ начальной школѣ.

Курсъ 4-го года и его составъ.

§ 1. Въ такъ называемыхъ „двухкомплектныхъ“ начальныхъ школахъ съ четырехгодичнымъ, при двухъ учителяхъ, курсомъ, третій годъ обученія можно освободить отъ усвоенія опредѣленій и правилъ, отъ рѣшенія слишкомъ сложныхъ чисто-ариѳметическихъ и слишкомъ замысловатыхъ алгебраическихъ задачъ. Зато въ третій годъ обученія въ такихъ школахъ надо особенно усиленно заниматься вычисленіями: изустными на легкіе денежные расчеты, письменными же и на торговыхъ счетахъ—на дѣйствія надъ многозначными числами и на переводъ обычныхъ русскихъ мѣръ на метрическія и обратно. Къ курсу же четвертаго года можно, въ двухкомплектной школѣ, отнести: а) усвоеніе учениками болѣе или менѣе стройнаго курса ариѳметики цѣлыхъ чиселъ въ систематической его формѣ; б) дополненіе познаній учениковъ о дробяхъ и о дѣйствіяхъ надъ ними, опять-таки въ болѣе или менѣе систематическомъ сопоставленіи этихъ познаній; в) четыре дѣйствія надъ десятичными дробями (безъ періодическихъ) въ ихъ примѣненіяхъ къ житейскимъ вопросамъ и къ метрической системѣ; г) рѣшеніе болѣе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ и болѣе или менѣе замысловатыхъ алгебраическаго характера; д) болѣе полное усвоеніе основныхъ геометрическихъ представленій: объ углѣ, о кругѣ, о треугольникѣ, о параллелограмѣ, о площадяхъ этихъ фигуръ, о прямоугольномъ параллелепипедѣ, а въ случаѣ возможности — также о прямой призмѣ, о пирамидѣ, о прямомъ цилиндрѣ, о прямомъ конусѣ, о шарѣ и объ объемахъ этихъ тѣлъ.—Если не вдаваться въ теоретическія соображенія, въ доказательство геометрическихъ теоремъ и признать права несомнѣнной очевидности нѣкоторыхъ свойствъ геометрическихъ фигуръ, то сюда можно было бы отнести также построеніе фигуръ, подобныхъ даннымъ прямолинейнымъ фигурамъ, и дать вѣрныя представленія о планѣ и его значеніи. Къ сожалѣнію, правильная постановка этого послѣдняго вопроса прямо невозможна безъ простѣйшихъ чертежныхъ инструментовъ: линейки, чертежнаго треугольника и циркуля съ пишущею ножкой, а также безъ мѣрительной ленты (рулетки) и простого линейнаго масштаба. Одно только **изложеніе** учителемъ относящагося сюда геометрическаго матеріала не приводитъ къ сколько-нибудь осязательнымъ результатамъ, а пріобрѣтеніе упомянутыхъ выше чертежныхъ инструментовъ (хотя бы по одному набору на трехъ человѣкъ) не всякой начальной школѣ, даже съ четырехлѣтнимъ курсомъ, по силамъ. Въ зависимости отъ только-что отмѣченныхъ условій, можетъ оказаться, что сколько-нибудь серьезное пополненіе геометрическаго разумѣнія учениковъ окажется для данной школы практически, вслѣдствіе чисто-матеріальныхъ условій, не выполнимымъ.

Четыре дѣйствія надъ обыкновенными дробями.

§ 2. Вопросы ариѳметики цѣлыхъ чиселъ, относящіяся, такъ сказать, къ теоретическому курсу, освѣщены въ главѣ шестой этой книги (§§ 4 — 13). Изъ четырехъ дѣйствій

надъ дробями только два (пока мы вращаемся въ области дробей, житейски важныхъ, т. е. половинъ, четвертей, восьмыхъ, десятыхъ, сотыхъ), а именно сложеніе и вычитаніе, не представляютъ для учениковъ никакихъ особенныхъ затрудненій. Умноженіе же на дробь и дѣленіе (обоего рода) на дробь представляютъ собою ученія довольно тонкія и условныя. А что касается сложенія и вычитанія дробей, выходящихъ за предѣлы упомянутыхъ выше, житейски важныхъ, дробей, то и эти два дѣйствія также не лишены трудностей, хотя другого рода. Въ то время какъ умноженіе и дѣленіе на дробь трудны для учениковъ по своему **логическому, внутреннему**, смыслу, сложеніе и вычитаніе дробей со сколько-нибудь необычными знаменателями требуютъ цѣлой совокупности чисто-вспомогательныхъ вычисленій, относящихся до такъ наз. приведенія дробей къ общему знаменателю. А эти вычисленія соприкасаются съ теоріею дѣлителей и, даже при наименьшемъ вниманіи къ этой теоріи, требуютъ большого навыка въ производствѣ, такъ сказать, постороннихъ вычисленій. Съ точки зрѣнія практической, и первыя два дѣйствія надъ необычными обыкновенными дробями, выраженными въ двадцать-первыхъ, тридцать-седьмыхъ и т. п. доляхъ, а равно остальныя два дѣйствія надъ дробями (умноженіе и дѣленіе на дробь) не особенно важны. Но послѣднія два дѣйствія все-таки могутъ быть предпочтены въ силу своего внутренняго значенія и въ силу того соображенія, что вопросъ о томъ, во сколько разъ $^3/_4$ вершка болѣе одной десятой доли дюйма, болѣе содержателенъ, чѣмъ вопросъ о томъ, сколько получится отъ сложенія дробей $^7/_{15}$ и $^2/_{31}$. Ибо такихъ дробей, какъ эти послѣднія, не только въ жизни, но и въ наукахъ и техникѣ не встрѣчается. Поэтому курсъ дробей, намѣченный въ ступени 29-ой, въ четвертый годъ обученія слѣдуетъ дополнить умноженіемъ и дѣленіемъ дробей въ простѣйшей постановкѣ этихъ вопросовъ, по возможности освобожденной отъ многочисленныхъ правилъ и опирающейся на самый **смыслъ** этихъ вопросовъ.

Десятичныя дроби.

Нѣкоторое мѣсто, какъ это уже указано выше, можно и даже полезно отвести десятичнымъ дробямъ въ курсѣ четвертаго года обученія въ начальной школѣ. Но при этомъ необходимо соблюдать слѣдующія условія: а) десятичныхъ дробей, въ которыхъ болѣе трехъ цифръ послѣ запятой, не надо; б) надо научить учениковъ отбрасывать всѣ остальныя цифры послѣ третьей послѣ запятой; в) безконечныхъ періодическихъ дробей равнымъ образомъ не надобно; г) ученики должны умѣть читать всякія десятичныя дроби только въ тысячныхъ и въ милліонныхъ доляхъ; д) они должны уразумѣть, въ чемъ **удобства** дѣйствій надъ десятичными дробями и для чего они изобрѣтены, а потому дѣйствій надъ неудобными десятичными дробями, не только въ жизни, но и въ наукѣ на встрѣчающимися, касаться не надо; е) изъ нихъ надо дѣлать не отдѣльную статью курса, а по возможности сблизить съ цѣлыми числами, съ одной стороны, и съ обыкновенными дробями, съ другой; наконецъ, ж) не надо забывать ихъ приложеній въ метрической системѣ мѣръ.

Задачи алгебраическаго характера.

§ 3. Въ виду того, что замысловатыя задачи алгебраическаго характера довольно часто встрѣчаются въ ариѳметическихъ задачникахъ разныхъ авторовъ, въ курсѣ 4-го года задачи этого рода иногда должны занять (въ зависимости отъ экзаменаціонныхъ

требованій и отъ вкусовъ учителя) то или иное мѣсто. Отвлеченное неалгебраическое (вѣрнѣе—скрыто-алгебраическое, но не буквенное) рѣшеніе задачъ этого рода для учениковъ не всегда посильно и большею частью крайне неинтересно и безрезультатно. Происходитъ это явленіе не только отъ того, что замысловатыя задачи алгебраическаго не отвѣчаютъ житейскимъ потребностямъ учениковъ. Эти задачи малолѣтніе ученики рѣшаютъ всегда со словъ учителя. Они никогда (за весьма рѣдкими исключеніями) не въ состояніи ясно и з л о ж и т ь весь ходъ мыслей и разсужденій, которыми онѣ рѣшаются, и могутъ, въ лучшемъ случаѣ только запомнить порядокъ тѣхъ дѣйствій, который они усвоили путемъ упражненій и который, по почти совершенно непонятнымъ имъ причинамъ, приводитъ къ рѣшенію задачъ даннаго типа. Дѣлу не только не помогаютъ, но даже вредятъ тѣ сборники задачъ, въ которыхъ замысловатыя задачи распредѣлены на типы. Это распредѣленіе способствуетъ, какъ извѣстно, только тому, что ученики, встрѣтившись съ задачей, припоминаютъ, что эта задача—„какъ на колокола“, или „какъ на ленты“, или „какъ на полушубки“. Они помнятъ, что въ такихъ-то задачахъ надо сначала то-то прибавить, а потомъ раздѣлить пополамъ, а въ такихъ-то сначала раздѣлить, а потомъ—прибавить, и т. п. Очень сильнымъ подспорьемъ при рѣшеніи замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера, способствующимъ не только кажущемуся разрѣшенію ея, но также уразумѣнію способовъ этого рѣшенія, является прямая линія. Этому подспорью посвящена часть главы VIII настоящей книги.

Умноженіе на нуль и на единицу и его смыслъ. § 4. Умноженіе на нуль и на одну единицу представляетъ собою первые случаи, когда первоначальный смыслъ умноженія уступаетъ мѣсто смыслу условному. Дѣйствительно: умножить на цѣлое число, не меньшее двухъ единицъ, значитъ взять множимое слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во множителѣ, пользуясь при этомъ таблицею умноженія. Но если множитель равенъ нулю или одной единицѣ, то не можетъ быть и рѣчи о томъ, чтобы взять множимое слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во множителѣ. Ибо слагаемыхъ должно быть, для возможности сложенія, по крайней мѣрѣ, два. Тѣмъ не менѣе говорятъ объ умноженіи на одну единицу и даже на нуль. Условились разумѣть подъ произведеніемъ какого угодно числа на одну единицу не иное что, какъ только множимое. Въ этомъ, и только въ этомъ, смыслѣ говорятъ и пишутъ:

$$7 \times 1 = 7;\ 19 \times 1 = 19 \text{ и т. п.}$$

Равнымъ образомъ подъ произведеніемъ какого угодно числа на нуль условились разумѣть не иное что, какъ только нуль. Въ этомъ, и только въ этомъ, смыслѣ говорятъ и пишутъ:

$$7 \times 0 = 0;\ 19 \times 0 = 0 \text{ и т. п.}$$

Причины установленія этихъ условій (или опредѣленій умноженія на одну единицу и на нуль) кроются въ двухъ стремленіяхъ математики, которыя ученикамъ съ трудомъ выясняются. Одно изъ этихъ стремленій состоитъ въ томъ, чтобы дѣйствія совершались надъ всякими числами и чтобы не надо было устанавливать исключеній, чтобы, напр., не приходилось говорить (беремъ занимающій насъ случай), что множителемъ можетъ быть только такое цѣлое число, которое не меньше двухъ единицъ. Другое изъ стремленій, обусловливающихъ смыслъ умноженія на одну единицу и на нуль, заключается въ такомъ построеніи опредѣленій, при которомъ основныя свойства произведенія двухъ чиселъ (перемѣстимость сомножителей и возможность расчлененія множимаго на части) не нарушались бы. Если бы, напр., произведеніе 7×0 не считалось равнымъ нулю, а произведеніе 7×1 не считалось равнымъ семи единицамъ, то тожества не

$$7 \times 0 = 0 \times 7 \text{ и } 7 \times 1 = 1 \times 7$$

имѣли бы мѣста, и величина произведенія двухъ сомножителей не всегда была бы независимою отъ порядка ихъ. Что опять-таки шло бы въ разрѣзъ со стремленіемъ математики къ такому обобщенію, которое устраняло бы необходимость исключеній. Мы видимъ изъ всего вышеизложеннаго, что условное значеніе умноженія въ нѣкоторыхъ случаяхъ встрѣчается, стало быть, даже въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ. Не менѣе условны случаи, когда нуль занимаетъ мѣсто второго слагаемаго, когда нуль является остаткомъ и когда нуль является вычитаемымъ. Здѣсь безъ соотвѣтствующихъ соглашеній тоже обойтись нельзя, такъ какъ и прибавленіе нуля, и вычитаніе нуля, и даже вычитаніе въ томъ случаѣ, когда уменьшаемое равно вычитаемому, не вытекаютъ изъ самаго смысла сложенія и вычитанія чиселъ, отличающихся отъ нуля, и вычитанія меньшаго числа изъ большаго. Надо ли это выяснять ученикамъ или не надо? Если дѣло поставить въ связь съ основными и простѣйшими опредѣленіями сложенія, вычитанія и умноженія, то выясненіе условности смысла первыхъ трехъ дѣйствій не только важно въ смыслѣ логическомъ, но важно и въ методическомъ смыслѣ. Полезно при этомъ также обратиться къ дѣленію на одну единицу, когда дѣлитель выражаетъ число одинаковыхъ частей, на которыя требуется раздѣлить дѣлимое, и на дѣленіе одного числа на другое, равное ему, число, когда дѣлитель выражаетъ величину частей, на которыя какъ бы требуется раздѣлить дѣлимое *).

Правила умноженія и дѣленія. § 5. Прежде чѣмъ переходить со своими учениками къ дѣйствіямъ умноженія и дѣленія на дробь, учитель долженъ разъ-на-всегда отказаться отъ усвоенія ими словесныхъ п р а в и л ъ производства дѣйствій. Правилъ этихъ можно составить множество. Но усвоеніе ихъ на-память требуетъ такого громаднаго количества труда, что ученикамъ, учащимся четвертый годъ въ начальной школѣ, его не одолѣть. Кромѣ того,—и это еще важнѣе,—знаніе пра-

*) Въ изданной мною „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“ (Спб. 1903) этимъ вопросамъ посвящены §§ 17, 29, 30, 31, 32, 48, 49, 62, 63, 64, 70 и 71,—причемъ только одинъ изъ этихъ параграфовъ (а именно § 17), въ которомъ говорится о нулѣ, какъ слагаемомъ, не снабженъ звѣздочкой. Остальные же, какъ не обязательные въ курсѣ ариѳметики, подлежащемъ непремѣнному усвоенію въ начальной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ. Въ 4-ый годъ обученія содержаніе этихъ параграфовъ вполнѣ можетъ быть усвоено учениками, если съ ними предварительно и систематически уяснить себѣ смыслъ каждаго изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій

вилъ наизусть ни къ чему не приводитъ: благодаря почти безконечной повторяемости однихъ и тѣхъ же словъ („помножить числителя на числителя, а знаменателя на знаменателя“ и т. п.), ученики не вдумываются въ смыслъ дѣйствія и его цѣль. Это ослабленіе вниманія къ цѣли дѣйствія почти неизбѣжно, когда все дѣло сводится къ правиламъ, и приводитъ къ очень неприглядным, во всѣхъ отношеніяхъ, результатамъ. Вообще къ одному знанію правилъ наизусть современная дидактика относится отрицательно, а къ заучиванію ихъ—еще болѣе несочувственно. Смыслъ умноженія и дѣленія на цѣлое число и смыслъ умноженія и дѣленія на дробь—вотъ на что должно обращать все вниманіе учениковъ, и если они, сообразно съ этимъ смысломъ, научены производить то или иное изъ этихъ двухъ дѣйствій въ томъ или иномъ случаѣ, то цѣли усвоенія дѣтьми этихъ ученій достигнуты вполнѣ,—притомъ какъ цѣли практическія, такъ и цѣли образовательныя. Правила же, даже и въ этомъ случаѣ, окажутся ни на что не нужными и скорѣе мѣшающими, чѣмъ помогающими производству дѣйствія. При такой постановкѣ дѣла, не только не будетъ потеряно время, но его будетъ даже много выиграно.

Смыслъ умноженія дроби на цѣлое число.

§ 6. Смыслъ умноженія на цѣлое число дается ученикамъ очень легко: только не надо дѣла ставить на почву правила. Сущность его въ томъ, что цѣлый множитель выражаетъ число равныхъ между собою слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно множимому, и что запись умноженія въ этомъ случаѣ представляетъ собою только сокращенную запись сложенія. Такъ, вмѣсто того чтобы писать

$$\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16},$$

пишутъ короче:

$$\frac{3}{16}\times 5.$$

Если ученики умѣютъ сознательно складывать дроби съ одинаковыми знаменателями, то они очень скоро усвоятъ себѣ навыкъ—съ разумѣніемъ умножать дробь и смѣшанное число на цѣлое число. При этомъ не будетъ проявляться у учениковъ, при умноженіи смѣшаннаго числа на цѣлое, желанія обратить смѣшанное число въ неправильную дробь и невозможны будутъ случаи, когда ученики, дѣлая все по вызубреннымъ правиламъ, при умноженіи дроби на цѣлое число, умножаютъ и числителя и знаменателя дроби на даннаго множителя.—Еще два пункта заслуживаютъ вниманія. Когда знаменатель множимаго очевидно дѣлится на множителя, то ученики это должны видѣть, и въ такомъ случаѣ для отысканія произведенія не умножать числителя, а дѣлить знаменателя. Здѣсь должна быть выдвигаема на первый планъ идея о необходимости увеличенія числа въ нѣсколько разъ и о возможности этого увеличенія съ помощью уменьшенія знаменателя. Другой пунктъ — умноженіе на число, равно знаменателю множимаго. Пусть требуется найти произведеніе:

$$\frac{3}{16}\times 16.$$

Здѣсь не можетъ быть рѣчи о сокращеніи о перечеркиваніи данныхъ

чиселъ, и т. п. Здѣсь вниманіе учениковъ должно быть направлено на то, что, вмѣсто каждой шестнадцатой доли одной единицы мы получимъ цѣлую единицу, а потому этимъ упражненіямъ должны предшествовать такія:

$$\frac{1}{16}\times 16;\ \frac{1}{100}\times 100;\ \frac{1}{8}\times 8 \text{ и т. д.}$$

Смыслъ дѣленія дроби на цѣлое число.

§ 7. Гораздо тоньше и затруднительнѣе для уразумѣнія учениками вопросъ о дѣленіи дроби на цѣлое число, если не ставить дѣло на почву ничѣмъ, кромѣ недоступныхъ ученикамъ научныхъ основаній, не оправдываемаго и молчаливо принятаго совпаденія и отожествленія обоихъ случаетъ дѣленія во-едино. Въ частныхъ вопросахъ, вытекающихъ изъ задачъ жизненнаго содержанія, между случаемъ, когда съ помощью дѣленія отыскиваютъ множимое, и случаемъ, когда отыскиваютъ множителя, разница громадна. Пусть въ одномъ случаѣ требуется отыскать частное, происходящее отъ раздѣленія $\frac{3}{16}$ вершка на 10 одинаковыхъ частей, а въ другомъ опредѣлить, какую часть десяти вершковъ составляетъ $\frac{3}{16}$ вершка или, что—то же, узнать, на какую отвлеченную дробь надо помножить 10 вершковъ для того, чтобы въ результатѣ получить $\frac{3}{16}$ вершка. Практики-учителя знаютъ, какъ мало говорятъ уму и разумѣнію учениковъ теоретическая обработка этихъ вопросовъ,—эта, для нихъ прямо безплодная, игра въ перестановку сомножителей и т. п. Результатомъ этой игры, даже при наилучшей постановкѣ дѣла, является только убѣжденіе учениковъ въ томъ, что дѣлать это надо одинаково и что въ одномъ случаѣ надобно ставить въ записи частнаго наименованіе его, а въ другомъ этого дѣлать не слѣдуетъ. Истинный же смыслъ этихъ двухъ дѣйствій отъ учениковъ почти совершенно ускользаетъ. Во избѣжаніе этого, надо строго различать (что̀, къ тому же, въ задачахъ съ условіями прямо необходимо для сознательнаго ихъ рѣшенія): а) дѣленіе для отысканія частнаго въ узкомъ смыслѣ этого слова (т. е. множимаго), и б) дѣленіе для отысканія отношенія (т. е. множителя).

Въ первомъ случаѣ, т. е. въ случаѣ дѣленія дроби на извѣстное число одинаковыхъ частей, мы видимъ полное сходство съ умноженіемъ на цѣлое число съ того момента, какъ опредѣленіе, т. е. смыслъ, этого дѣленія установлено. На частностяхъ поэтому здѣсь останавливаться не для чего. Въ этомъ случаѣ полезно обратиться и къ уменьшенію дѣлимаго, и къ двумъ пріемамъ этого уменьшенія, изъ коихъ одинъ (раздѣленіе каждой доли) всегда, а другой (уменьшеніе числителя) — не всегда возможенъ. Что же касается второго случая, т. е. случая, когда требуется найти множителя, на котораго надо помножить дѣлителя, чтобы получить дѣлимое, то очевидно, что множитель этотъ не можетъ быть дробью до тѣхъ поръ, пока мы еще не знаемъ смысла умноженія на дробь и способа производства этого дѣйствія. Вотъ почему надо обратиться къ умноженію на дробь, прежде чѣмъ дѣлить именованную дробь на цѣлое число того же наименованія для отысканія отношенія первой ко второму.

Умноженіе на дробь.

§ 8. Когда умноженіе и дѣленіе на цѣлое число въ указанныхъ выше значеніяхъ и случаяхъ этихъ двухъ дѣйствій учениками усвоены, можно перейти къ умноженію на дробь.

Смыслъ умноженія на дробь. Прежде всего ученики должны ясно уразумѣть и вполнѣ усвоить себѣ навыкъ обозначать въ видѣ дроби частное, происходящее отъ раздѣленія любого числа на любое число одинаковыхъ частей. Когда это усвоено, надо еще поупражнять ихъ въ рѣшеніи вопросовъ, относящихся до отысканія любой *доли* даннаго числа. Когда и это усвоено, можно установить (и это потребуетъ неоднократныхъ упражненій, а не только разъ установленнаго опредѣленія), что вмѣсто того, чтобы говорить, что требуется найти одну пятую долю даннаго числа, говорятъ также: „помножить данное число на одну пятую“ и, если данное число равно, напр., 16 аршинамъ, то это пишутъ такъ:

$$16 \text{ арш.} \times \frac{1}{5}.$$

Послѣ достаточнаго количества упражненій этого рода, можно перейти къ вычисленію не одной какой-либо доли, а къ вычисленію нѣсколькихъ одинаковыхъ долей даннаго числа. Когда и это учениками усвоено, можно перейти къ установленію, съ помощью многократныхъ упражненій, того опредѣленія умноженія на дробь, которое состоитъ въ слѣдующемъ: вмѣсто того, чтобы говорить, что требуется найти $\frac{3}{4}$ какого-нибудь числа, говорятъ и пишутъ, что это число надо помножить на $\frac{3}{4}$. При этомъ учитель отнюдь не долженъ думать, что здѣсь важно общее опредѣленіе умноженія на дробь, начинающееся словами „умноженіемъ на дробь называется“ и т. д. Вполнѣ достаточно не только для учениковъ начальной школы, но и вообще для малолѣтнихъ учениковъ, ежели они понимаютъ, что это значитъ умножить на $\frac{3}{4}$, на $\frac{5}{6}$, на $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{5}$ и т. д., и умѣютъ эти произведенія находить, найдя сначала одну, въ данномъ случаѣ нужную, долю множимаго, а потомъ—требуемое число такихъ долей его.—Правилъ здѣсь не требуется никакихъ, нужны только пониманіе условнаго смысла умноженія и навыкъ въ надлежащемъ обозначеніи и сознательномъ производствѣ этого дѣйствія.

Произведеніе въ случаѣ когда множитель — правильная дробь. § 9. Смущеніе учениковъ возбуждаютъ не уразумѣніе условнаго смысла умноженія на дробь и даже на производство этого дѣйствія, если только дѣло не поставлено на почву множества правилъ, различающихъ всѣ случаи умноженія дроби на цѣлое, цѣлаго на дробь, дроби на дробь, смѣшаннаго числа на цѣлое, смѣшаннаго на дробь, и т. д.) Смущеніе учениковъ, не только понятное, но и желательное, должна вызывать та особенность дѣйствія умноженія, вслѣдствіе которой оно имѣетъ разный смыслъ въ разныхъ случаяхъ: умноженіе на цѣлое число, не меньшее двухъ единицъ, надо понимать въ одномъ смыслѣ, умноженіе на одну единицу—въ другомъ, на нуль—въ третьемъ, на правильную дробь—въ четвертомъ, на неправильную дробь, равную единицѣ, — въ пятомъ, на неправильную дробь, большую единицы—въ шестомъ, на смѣшанное число—въ седьмомъ. Не надо думать, что установленіе самаго общаго опредѣленія умноженія можетъ устранить возможность этого смущенія. Наоборотъ: общія опредѣленія нисколько не способствуютъ уясненію дѣла. Не скрывать отъ учениковъ трудности вопроса, а напротивъ оттѣнить эти трудности — лежитъ на обязанности учителя. Когда ученики поймутъ, что если принять нуль за множителя, то онъ, такъ сказать, уничтожитъ множимое, а единица, какъ множитель, означаетъ только то, что множимое надо оставить безъ измѣненія, что при множителѣ, большемъ единицы, множимое составляетъ часть произведенія, а при множителѣ, меньшемъ единицы, произведеніе составляетъ часть множимаго, — дѣло выиграно, и никакія правила ученикамъ не страшны. Они сами подмѣтятъ, что надо сдѣлать съ числителемъ и что—съ знаменателями двухъ дробей, которыя требуются перемножить. Уменьшеніе же множимаго при умноженіи на правильную дробь для нихъ будетъ вытекать не изъ правилъ, а изъ самаго смысла умноженія на правильную дробь.

Дѣленіе на дробь. § 10. Какъ ни тонки нѣкоторыя частности умноженія на дробь, при дѣленіи еще больше подобныхъ тонкостей. Пока дѣлитель число отвлеченное, дѣло можно поставить сначала на почву условнаго опредѣленія: когда требуется узнать число, $\frac{3}{4}$ котораго равны 15-ти, то вмѣсто этого говорятъ, что 15 требуется раздѣлить на $\frac{3}{4}$. Здѣсь требуется опредѣлить число, отъ умноженія котораго на $\frac{3}{4}$ получатся 15 единицъ, и т. д. Ранѣе всего необходимо, конечно, разрѣшить рядъ цѣлесообразныхъ задачъ на вычисленіе цѣлаго по одной данной долѣ его, затѣмъ—на вычисленіе цѣлаго по нѣсколькимъ долямъ его, и т. д.,—совершенно въ томъ же духѣ, какъ это дѣлалось при умноженіи на дробь. Нѣкоторыя затрудненія, подобныя разсмотрѣннымъ въ концѣ предыдущаго параграфа, встрѣтятся при уясненіи себѣ учениками того обстоятельства, что частное при дѣленіи на отвлеченную правильную дробь дѣлается цѣлымъ, а дѣлимое—частью этого цѣлаго.

Дѣлитель — дробь, частное — отношеніе дѣлимаго къ дѣлителю. § 11. Еще больше тонкостей въ томъ случаѣ, когда требуется найти отношеніе дѣлимаго къ дѣлителю, т. е. когда дѣлитель играетъ роль множимаго, а частное — роль множителя. Здѣсь прежде всего надо обратиться къ отысканію отношенія одного цѣлаго именованнаго дѣла къ другому того же рода и къ обозначенію отношенія въ видѣ отвлеченной дроби. Порядокъ упражненій (безо всякихъ правилъ) можетъ быть принятъ, примѣрно, слѣдующій:

1) что это значитъ раздѣлить 16 аршинъ на 4 аршина, и т. п. (отношеніе—цѣлое отвлеченное число);

2) что это значитъ раздѣлить 1 арш. на 4 аршина, и т. п. (отношеніе—отвлеченная доля единицы);

3) что это значитъ раздѣлить 3 арш. на 4 аршина и т. п. (отношеніе—отвлеченная дробь, числитель которой больше единицы);

4) что это значитъ раздѣлить 18 арш. на 5 аршинъ и т. п. (отношеніе—смѣшанное отвлеченное число или отвлеченная неправильная дробь);

5) что это значитъ раздѣлить $\frac{1}{4}$ арш. на 5 аршинъ и т. п. (дѣлимое—доля именованной единицы);

наконецъ, 6) что это значитъ раздѣлить $\frac{3}{4}$ арш. на $\frac{5}{8}$ аршина и т. п. (дѣлимое—именованная дробь).

Значеніе и смыслъ всѣхъ этихъ вопросовъ легко, хотя и не сразу, усваиваются учениками, потому что смыслъ ихъ всегда одинъ и тотъ же. Дѣйствительно: раздѣлить одну величину (не отвлеченное число, а величину, т. е. число именованное) на другую всегда означаетъ одно и то

же, а именно—найти то отвлеченное число, на которое надо помножить дѣлителя для того, чтобы получить дѣлимое. Вся трудность занимающаго насъ случая заключается только въ слѣдующемъ: а) отношеніемъ (т. е. частнымъ) въ нашемъ случаѣ всегда является дробь, притомъ отвлеченная, умноженіе на которую само по себѣ, независимо отъ дѣленія, представляетъ, въ свою очередь, трудности, и б) отношеніе въ этомъ случаѣ выражаетъ, не сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, а какую часть дѣлителя составляетъ дѣлимое. При указанной выше послѣдовательности упражненій, эти трудности легко преодолимы и не только не требуютъ какихъ-либо отдѣльныхъ правилъ, а даже наоборотъ—не допускаютъ возможности правилъ, сколько-нибудь плодотворныхъ и немногословныхъ. Здѣсь все дѣло сводится только къ сознательному вычисленію, и здѣсь особенно важно помнить основное начало, которое провозгласилъ еще Коменскій и по которому „ученикъ, вычисляя, долженъ учиться“. При соблюденіи требованій этого основного начала, никакое дѣленіе на цѣлое число и на дробь для учениковъ не будетъ затруднительнымъ, и даже тѣ случаи, когда дѣлимое или дѣлитель будетъ числомъ смѣшаннымъ, не поставятъ ученика втупикъ.—Чтобы перейти къ дѣленію на дробь въ томъ случаѣ, когда частное является отношеніемъ дѣлимаго къ дѣлителю, можно принять слѣдующую послѣдовательность весьма полезныхъ упражненій:

1) дѣлимое—доля именованной единицы, дѣлитель—такая же точно доля той же единицы ($\frac{1}{4}$ ар. : $\frac{1}{4}$ ар., $\frac{1}{7}$ саж. : $\frac{1}{7}$ саж. и т. п.);

2) дѣлимое—доля именованной единицы, а дѣлитель—эта единица ($\frac{1}{4}$ ар. : 1 ар., $\frac{1}{7}$ саж. : 1 саж. и т. п.);

3) дѣлимое—именованная единица, дѣлитель—какая-нибудь доля ея (1 ар. : $\frac{1}{4}$ ар., 1 саж. : $\frac{1}{7}$ саж., и т. п.);

4) дѣлимое—именованная дробь, дѣлитель—единица того же наименованія ($\frac{3}{4}$ ар. : 1 ар., $\frac{2}{7}$ саж. : 1 саж. и т. п.);

5) дѣлимое—именованная единица, дѣлитель—именованная дробь того же наименованія (1 ар. : $\frac{3}{4}$ арш., 1 ар. : $\frac{5}{4}$ ар. и т. п.);

6) дѣлимое—доля именованной единицы, дѣлитель—другая доля той же единицы ($\frac{1}{4}$ ар. : $\frac{1}{10}$ ар., $\frac{1}{10}$ ар. : $\frac{1}{4}$ ар. и т. п.);

5) дѣлимое—именованная дробь, дѣлитель—именованная доля того же наименованія ($\frac{3}{4}$ ар. : $\frac{1}{10}$ ар., $\frac{5}{7}$ саж. : $\frac{1}{20}$ саж. и т. п.);

6) дѣлимое—доля именованной единицы, дѣлитель—дробь того же наименованія ($\frac{1}{4}$ ар. : $\frac{3}{10}$ арш., $\frac{1}{7}$ саж. : $\frac{51}{100}$ саж. и т. п.);

и 7) дѣлимое и дѣлитель—именованныя дроби съ числителями, отличающимися отъ единицы.

Несмотря на кажущуюся многочисленность упражненій, опытъ показываетъ, что они лучше всяческихъ правилъ и алгебраическихъ пріемовъ „доказательства“ доводятъ учениковъ не только до полнаго пониманія вопроса о кратномъ сравненіи одной дроби съ другою, но даже до полной власти надъ вычисленіями въ этихъ случаяхъ.—Какъ бы то ни было, учителя начальной школы къ такимъ тонкимъ вопросамъ должны обращаться не ранѣе четвертаго года обученія. Въ случаѣ же недостаточной для того подготовки учениковъ, учитель начальной школы долженъ больше вниманія удѣлить не умноженію и дѣленію на дробь, а отысканію частей

цѣлаго, не называя этого вычисленія умноженіемъ, и отысканію цѣлаго по данной части его, не называя этого вычисленія дѣленіемъ. Что же касается кратнаго сравненія двухъ дробей, то, въ крайнемъ случаѣ, можно его дѣлать, приводя дроби къ общему знаменателю, или же его опустить.

Десятичныя дроби и дѣйствія надъ ними.

§ 12. Приступая къ вычисленіямъ надъ десятичными дробями, учитель четвертаго отдѣленія начальной школы долженъ себѣ усвоить слѣдующія точки зрѣнія: а) надъ десятичными дробями съ многочисленными цифрами послѣ запятой приходится производить дѣйствія лишь очень рѣдко; б) чаще всего приходится производить дѣйствія надъ десятичными дробями, выраженными въ десятыхъ и сотыхъ доляхъ единицы; в) надъ обращеніемъ безконечныхъ десятичныхъ періодическихъ дробей въ обыкновенныя трудиться не слѣдуетъ, потому что онѣ никогда (ни въ жизни, ни въ наукахъ) не встрѣчаются; г) особенныхъ правилъ производства дѣйствій надъ десятичными дробями ученики усваивать не должны, если у нихъ есть, съ одной стороны, вѣрныя представленія о десятичной дроби, какъ о дроби, и, съ другой стороны—о десятичной дроби, какъ о десятичномъ числѣ, подчиненномъ закону десятичной системы счисленія.

Чтеніе и записываніе десятичныхъ дробей.

Ученики должны прежде всего научиться тому чтенію десятичныхъ дробей, по которому каждая десятичная дробь съ двумя и болѣе значащими цифрами послѣ запятой представляетъ собою с у м м у двухъ или нѣсколькихъ дробей съ однозначными числителями. Такъ:

$$0{,}597 = \frac{5}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1000}, \text{ а } 0{,}507 = \frac{5}{10} + \frac{7}{1000}.$$

Далѣе они должны научиться чтенію десятичныхъ дробей съ двумя и тремя цифрами послѣ запятой, основываясь на сложеніи. Если въ десятичной дроби болѣе трехъ и менѣе семи цифръ послѣ запятой, то ученики должны разлагать дробь на классы тысячныхъ и милліонныхъ. Такъ:

$$0{,}576247 = \frac{576}{1000} + \frac{247}{1000000},$$

$$0{,}57624 = 0{,}576240 = \frac{576}{1000} + \frac{240}{1000000},$$

$$0{,}5762 = 0{,}576200 = \frac{576}{1000} + \frac{200}{1000000},$$

$$0{,}000276 = \frac{0}{1000} + \frac{276}{100000} \text{ и т. д.}$$

Диктуя ученику десятичную дробь, учитель долженъ заботиться не о томъ, какъ бы затруднить ученика этой диктовкой, а наоборотъ—о томъ, чтобы для ученика было совершенно ясно, о какой дроби идетъ рѣчь. Поэтому и диктовать онъ долженъ, разбивая дробь на классы и произнося (какъ это дѣлаютъ всѣ, кому приходится производить много вычисленій надъ десятичными дробями) нули въ тѣхъ случаяхъ, когда это облегчаетъ написаніе дроби. Напр., если надо продиктовать дробь 0,070003, то не только нѣтъ надобности диктовать ее такъ: „семьдесятъ тысячъ три милліонныхъ“, но даже не слѣдуетъ говорить: „семьдесятъ тысячныхъ и три милліонныхъ“. Можно продиктовать дробь такъ:

„нуль цѣлыхъ, нуль и 70 тысячныхъ, нуль, нуль и 3 милліонныхъ“. Отъ этого никто изъ учениковъ ничего не потеряетъ.

Отбрасываніе послѣднихъ цифръ.

Надо научить учениковъ отбрасыванію послѣднихъ цифръ десятичной дроби, ежели ихъ много, и показать ученикамъ, что при этомъ дѣлается съ дробью. Можно при этомъ начать съ приблизительныхъ значеній цѣлыхъ многозначныхъ чиселъ. Полезно, если ученики, отбрасывая рядъ цифръ (т. е. беря приблизительное значеніе числа), обращаютъ вниманіе на первую, считая отъ лѣвой руки къ правой, цифру: если она—не меньше 5-ти, то послѣднюю изъ остающихся цифръ лучше увеличить на одну единицу. Такъ, вмѣсто 27 653, если надо выразить это число въ тысячахъ, лучше взять 28 000, чѣмъ 27 000, такъ какъ 28 000 ближе къ данному числу, чѣмъ 27 000. Точно также, если дана дробь 0,218543, то 0,219 ближе къ ней, чѣмъ 0,218. И т. п.

Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей.

Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей полезно ставить на точки зрѣнія приведенія къ общему знаменателю, хотя оно и не всегда необходимо. Хорошо при этомъ копейки выражать въ сотыхъ доляхъ рубля и, исходя изъ этого примѣра, построить производство первыхъ двухъ дѣйствій какъ на началѣ десятичной системы, такъ и на свойствахъ дробей.

Умноженіе десятичныхъ дробей.

Порядокъ упражненій въ умноженіи десятичныхъ дробей можно принять слѣдующій:

а) умноженіе десятичной дроби на однозначное число, и обратно: умноженіе цѣлаго числа на десятичную дробь;

б) умноженіе на 10, на 100 и т. д. въ связи съ увеличеніемъ въ 10, 100, и т. д.;

в) умноженіе на 0,1, на 0,001 (дальше итти, стоя на практическихъ точкахъ зрѣнія, не для чего) въ связи съ уменьшеніемъ въ 10, 100 и 1000 разъ;

г) умноженіе десятичныхъ дробей на цѣлое двузначное и трехзначное число видовъ 20, 30 и т. д., 200, 300 и т. д.;

д) умноженіе десятичныхъ дробей на двузначныя и трехзначныя числа съ большимъ числомъ значащихъ цифръ;

е) умноженіе на десятичную дробь съ двумя и тремя значащими цифрами послѣ запятой.

Расположеніе вычисленій.

Если соблюдать этотъ порядокъ, то окажется, что каждое умноженіе ученики будутъ производить на основаніи предыдущаго. Такъ, чтобы выполнить умноженіе

$$2{,}716 \times 0{,}354,$$

ученикъ переведетъ это умноженіе на слѣдующее:

$$0{,}002\,716 \times 354$$

а это послѣднее расположитъ такъ:

$$0{,}002\,716 \times 354 = 0{,}861\,464.$$

0,7148
13580
10864

О правилахъ, какъ это легко видѣть, вникнувъ въ дѣло, здѣсь рѣчи нѣтъ: здѣсь все дѣло въ уразумѣніи смысла умноженія, въ замѣнѣ одного умноженія другимъ и въ навыкахъ сознательнаго отношенія учениковъ къ частнымъ случаямъ, выше приведеннымъ.

Дѣленіе десятичныхъ дробей

Дѣленіе десятичныхъ дробей считается еще труднѣе умноженія, и это объясняется не изобиліемъ правилъ производства этого дѣленія. На самомъ дѣлѣ, производство дѣленія, по существу своему, въ случаѣ цѣлаго дѣлителя, вполнѣ примыкаетъ къ производству дѣленія цѣлыхъ чиселъ. Въ случаѣ же дробнаго дѣлителя, правило дѣленія на десятичную дробь можетъ быть то же, что при дѣленіи на дробь обыкновенную.—Пусть требуется произвести дѣленіе:

$$3{,}576 : 16.$$

Можно разсуждать, какъ при цѣлыхъ числахъ: цѣлаго числа въ частномъ не будетъ, запишемъ нуль цѣлыхъ; 3 цѣлыхъ единицы раздробимъ въ десятыя, и т. д.—Пусть требуется произвести дѣленіе:

$$12{,}716 : 0{,}3.$$

Можемъ разсуждать такъ: это значитъ найти такое число, котораго $\frac{3}{10}$ равны 12,716; но $\frac{1}{10}$ искомаго числа въ 3 раза меньше дѣлимаго; раздѣлимъ его на 3, и т. д. Расположеніе вычисленій въ этомъ случаѣ можетъ быть слѣдующее:

$$\begin{array}{l} 12{,}716 : 0{,}3 \quad = 42{,}39 \text{ (прибл.)} \\ \hline 12{,}716 : 3 \quad = 4{,}2386\ldots \\ 4{,}2386\ldots \times 10 = 42{,}386 \end{array}$$

Другой примѣръ:

$$17{,}1 : 0{,}24 = 71{,}25.$$

$$\begin{array}{l|l} 17{,}1 : 24 = 0{,}7125; & \\ \hline 168 & 0{,}7125 \times 100 = 71{,}25. \\ 30 & \\ 24 & \text{Въ этомъ послѣднемъ случаѣ дѣленіе совершилось точно, но ученики должны понимать, что} \\ \hline 60 & \text{это не всегда случается.} \\ 48 & \\ \hline 120 & \\ 120 & \\ \hline \end{array}$$

Обращеніе обыкновенной дроби въ десятичную.

§ 13. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя должно привести учениковъ къ сознанію необходимости и важности только приблизительнаго значенія дроби. Начинать надо съ обращенія такихъ обыкновенныхъ дробей въ десятичныя, у которыхъ числитель равенъ 1-цѣ. Здѣсь очень просто и ясно раздробленіе одной единицы въ десятыя доли, нѣсколькихъ десятыхъ—въ сотыя и т. д. Труднѣе, хотя ученики и знаютъ, что всякая дробь можетъ быть разсма-

триваема какъ частное отъ раздѣленія ея числителя на знаменателя, обращеніе обыкновенныхъ дробей, у которыхъ числители отличаются отъ единицы. Трудность эта обусловливается тѣмъ, что $\frac{3}{4}$ или $\frac{5}{7}$, несмотря на всяческія знанія учениковъ, представляются имъ **всегда** въ видѣ **суммы** нѣкоторыхъ одинаковыхъ долей, а не въ видѣ частнаго, происходящаго отъ раздѣленія числа, равнаго числителю, на число, равное знаменателю. Такъ какъ подобная точка зрѣнія учениковъ вполнѣ естественна и даже неустранима въ краткосрочномъ курсѣ начальной школы, то лучше всего обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя сначала ставить на эту естественную точку зрѣнія. Тогда для обращенія обыкновенныхъ дробей, даже необратимыхъ въ десятичныя, въ дроби послѣдняго рода, лучше всего обращать (приблизительно) только одну долю этой дроби въ десятичную, съ тѣмъ чтобы полученную десятичную дробь потомъ помножить на числителя данной дроби. Пусть, напр., требуется выразить $\frac{3}{7}$ въ сотыхъ доляхъ. Тогда (больше писать въ этомъ случаѣ ничего не слѣдуетъ!)

$$\frac{1}{7} = 0{,}142 \text{ (приблизительно),}$$

а

$$\frac{3}{7} = 0{,}426 \text{ (приблизительно)}$$

или (безопаснѣе!)

$$\frac{3}{7} = 0{,}43 \text{ (приблизительно).}$$

Только въ случаяхъ, когда знаменатель—двузначное или трехзначное число, можно выписывать всѣ вспомогательныя вычисленія. Напр., пусть требуется выразить въ сотыхъ доляхъ дробь $\frac{17}{41}$. Тогда

$$\begin{array}{r|l} 1 : 41 = 0{,}0243 & \\ 100 & \\ -\ 82 & \text{Отсюда} \\ \hline 180 & \\ -\ 164 & \frac{1}{41} = 0{,}024 \text{ (прибл.)} \\ \hline 160 & \\ -\ 123 & \text{а } \frac{17}{41} = 0{,}024 \times 17 \text{ и т. д.} \\ \hline \end{array}$$

Въ случаѣ же однозначнаго знаменателя, вычисленія должны быть производимы изустно, а результаты своевременно записываемы, напр., такъ: требуется выразить $\frac{1}{7}$ въ сотыхъ доляхъ; $\frac{1}{7}$ произошла отъ раздѣленія одной единицы на 7 равныхъ частей, въ одной единицѣ 10 десятыхъ, въ одной седьмой въ 7 разъ меньше, т. е. одна десятая, записываю:

$$\frac{1}{7} = 0{,}1....$$

3 десятыхъ остается нераздѣленныхъ, обращаю ихъ въ сотыя, получу 30 сотыхъ; 30 сотыхъ раздѣлю на 7 одинаковыхъ частей, получу 4 сотыхъ, записываю:

$$\frac{1}{7} = 0{,}14;$$

но мнѣ надо найти еще одну цифру, чтобы ошибка была меньше и т. п. Безусловно необходимы, чтобы нѣкоторыя десятичныя дроби были въ полномъ распоряженіи учениковъ и чтобы не приходилось обращать слѣдующихъ дробей въ десятичныя дроби:

$$\begin{array}{l|l|l} \frac{1}{2} = 0{,}5 & \frac{1}{8} = 0{,}125 & \frac{1}{5} = 0{,}2 \\ \frac{1}{4} = 0{,}25 & \frac{3}{8} = 0{,}375 & \frac{2}{5} = 0{,}4 \\ \frac{3}{4} = 0{,}75 & \frac{5}{8} = 0{,}625 & \frac{3}{5} = 0{,}6 \end{array}$$

и т. п. Это, пожалуй, важнѣе въ практическомъ отношеніи, чѣмъ умѣніе обращать всяческія дроби въ десятичныя.—Само собою разумѣется, что о періодическихъ безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ, а особенно — объ обращеніи ихъ въ обыкновенныя по многочисленнымъ правиламъ разнаго рода, въ курсѣ начальной школы и рѣчи не должно быть. Теорія этихъ дробей далеко выходитъ за предѣлы ариѳметики вообще и курса начальной школы въ особенности. Практическаго значенія эта теорія не имѣетъ ровно никакого, такъ какъ подобныя дроби не встрѣчаются ни въ жизни, ни даже въ техникѣ и наукѣ.

Какъ избѣгнуть отвлеченности въ десятичныхъ дробяхъ?

Дабы упражненія надъ десятичными дробями не страдали излишней отвлеченностью, надо по возможности примѣнять ихъ къ единицамъ метрической системы мѣръ. По **Высочайше** утвержденному „Положенію о мѣрахъ и вѣсахъ“, международные метръ и килограммъ, ихъ подраздѣленія, а равно иныя метрическія мѣры дозволяется примѣнять въ Имперіи, наравнѣ съ основными россійскими мѣрами. Мѣрамъ этимъ, безъ сомнѣнія, предстоитъ великое будущее и у насъ въ Россіи, а въ нѣкоторыхъ раіонахъ (преимущественно фабричныхъ) онѣ уже и теперь встрѣчаются (въ техникѣ) довольно часто. А потому большее вниманіе къ нимъ и примѣненіе ихъ въ упражненіяхъ надъ десятичными дробями прямо обязательны для школы какъ въ методическомъ, такъ и въ практическомъ отношеніяхъ. Вычисленій этого рода можно придумать сколько угодно: сколько метровъ въ 3,3 аршина, если аршинъ считать равнымъ 0,71 метра, и т. п. Важно при этомъ, чтобы ученики твердо знали простѣйшія соотношенія между метрическими и русскими мѣрами: метръ $= 22\frac{1}{2}$ вершка, граммъ $= 22\frac{1}{2}$ долямъ, аръ $= 22$ кв. саженямъ, килограммъ $= 78$ лотамъ, дюймъ $= 2\frac{1}{2}$ сантиметрамъ, килограммъ $= 78$ лотамъ, килограммъ $= 234$ золотникамъ, метръ $= 1\frac{1}{2}$ аршинамъ безъ $1\frac{1}{2}$ вершковъ, килограммъ $= 2\frac{1}{2}$ фунта безъ двухъ лотовъ, и т. п. Надо помочь ученикамъ запомнить эти соотношенія, и это очень легко сдѣлать: цифра 2 и число 22 повторяются очень часто, число $1\frac{1}{2}$ встрѣчается тоже часто, въ килограммѣ 2 3 4 золотника (цифры 2, 3, 4), и т. п.—Хотя вдаваться въ тонкіе вопросы приближеннаго вычисленія въ этомъ курсѣ невозможно, но ученики должны понимать, что здѣсь необходима большая осторожность и что при обращеніи дроби $\frac{17}{41}$ въ десятичную лучше раздѣлить 17 на 41, чѣмъ умножать приблизительную величину дроби $\frac{1}{41}$ на 17.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Задачи алгебраическаго характера.

Задачи алгебраическаго характера.

§ 1. Что касается замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера, то ихъ рѣшеніе выходитъ далеко за предѣлы курса начальной одноклассной школы. Относительно способовъ ихъ рѣшенія и методическаго распредѣленія по типамъ читатель можетъ найти нѣкоторыя свѣдѣнія во 2-мъ выпускѣ „Задачника для учителей“ и во второй части „Методики“. Но, для большей полноты, ниже предлагаются рѣшенія наиболѣе часто встрѣчающихся замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера безъ непосредственной помощи алгебры. Интересующихся алгебраическою стороною и смысломъ распредѣленія задачъ на классы позволяемъ себѣ отослать къ статьѣ, посвященной нами этому вопросу въ № 2 „Русской Школы“ за 1900 г., подъ заглавіемъ: „Объ ариѳметическихъ задачахъ алгебраическаго характера“.

А. Задачи съ одною неизвѣстною величиною.

Дѣйствія надъ задуманнымъ числомъ.

§ 2. а) Я задумалъ число; помноживъ его на 4, прибавилъ къ полученному 7 и въ концѣ-концовъ (въ результатѣ) получилъ 39; какое я задумалъ число?—Я прибавилъ къ какому-то числу 7 и получилъ въ результатѣ 39; стало-быть, я 7 прибавилъ къ числу 32...—32 я получилъ послѣ того, какъ я помножилъ задуманное число на 4; стало-быть, я задумалъ 8...—Провѣрить!

б) Я задумалъ число; помножилъ его на 5, изъ полученнаго вычелъ 12, получилъ 48; какое число я задумалъ?—Я изъ какого-то числа (не задуманнаго мною!) вычелъ 12, получилъ 48; стало-быть, я вычелъ 12 изъ 60-ти... — 60 я получилъ послѣ умноженія задуманнаго числа на 5; стало-быть, я задумалъ 12 (т. к. $60 : 5 = 12$).—Провѣрить!

в) Я задумалъ число; раздѣлилъ его на 7, къ полученному прибавилъ 9, получилъ 14; что я задумалъ? — Я прибавилъ къ какому-то числу 9 и получилъ въ суммѣ 14, стало-быть, я 9 прибавилъ къ пяти (т. к. $14 - 9 = 5$.)—Но 5 я получилъ послѣ того, какъ я задуманное число раздѣлилъ на 7, стало-быть, я задумалъ 35...—Провѣрить!

г) Задумалъ число; раздѣлилъ его на 8; изъ полученнаго вычелъ 13; получилъ въ результатѣ 18; какое число я задумалъ? — 18 получилъ послѣ вычитанія 13-ти изъ какого-то числа; это послѣднее число равно суммѣ $18 + 13$ или 31-му; но 31 единица получилась послѣ того, какъ я раздѣлилъ задуманное мною число на 8; стало-быть, я задумалъ число, въ 8 разъ большее, чѣмъ 31, т. е. 248...—Провѣрить!

д) Задумалъ число; къ нему прибавилъ 10, полученное умножилъ на 17 и въ результатѣ получилъ 1360; какое число я задумалъ?—Я получилъ 1360 послѣ умноженія какого-то числа на 17, стало-быть, это неизвѣстное равно $1360 : 17 = 80$; но это множимое получилось послѣ того, какъ я къ задуманному мною числу прибавилъ 10; стало-быть задумано 70...—Провѣрить! Задачи этого типа могутъ быть облечены и въ не столь отвлеченную форму, напр., въ такую: нѣкто разсчиталъ, что если онъ купитъ нужное ему количество сукна по 8 руб. за аршинъ, то у него останется 6 руб., сколько ему нужно сукна, если у него всего 50 руб.?—У покупателя было 50 руб., а послѣ покупки осталось 6 р., стало-быть, онъ истратилъ 44 руб. на покупку сукна по 8-ми руб. за арш., и т. д.

Задачи съ нѣск. дѣйствіями надъ задуманнымъ числомъ.

§ 3. а) Если задуманное число помножить на 3, къ полученному прибавить 18, а вновь полученное раздѣлить на 6, то получится 18; какое число задумано? — Число 18 получилось отъ раздѣленія какого-то числа на 6; дѣлимое въ этомъ случаѣ равно 108-ми; это дѣлимое получилось отъ прибавленія 18-ти къ нѣкоторому числу,—это послѣднее число равно 90; но 90 получилось отъ умноженія задуманнаго числа на 3; стало-быть, задуманное число равно 30-ти.

б) Я задумалъ число: если его умножить на 8, къ полученному прибавить 4, вновь полученное число раздѣлить на 9, а изъ этого частнаго вычесть 2, то получится 2. Какое я задумалъ число?—Изъ нѣкотораго частнаго вычтено 2, въ остаткѣ тоже 2; стало-быть, это частное равно 4-мъ. Дѣлитель равенъ 9-ти; стало-быть, дѣлимое равно 9×4, т. е. 36-ти. Сумма равна 36, одно изъ слагаемыхъ 4; стало-быть, другое равно 32. Это число есть произведеніе задуманнаго числа на 8; стало-быть, задуманное число равно $32 \mid 8$, т. е. 4-мъ. И т. п.

Условія задачъ этого рода, которыя, какъ и задачи § 2 этой главы, могутъ отличаться одна отъ другой порядкомъ дѣйствій и числами, въ числѣ коихъ могутъ быть и дроби, учителемъ и учащимися могутъ быть записываемы слѣдующимъ образомъ: „$\times 8$; $+ 4$; $\mid 9$; $- 2$; $= 2$“. — Пусть предложена слѣд. задача съ дробными данными:

в) Если къ пяти двѣнадцатымъ задуманнаго числа прибавить $\frac{1}{18}$ единицы, то получится $\frac{1}{3}$; какъ велико задуманное число?—Одна треть одной единицы получилась отъ прибавленія одной восемнадцатой доли единицы къ какому-то, неизвѣстному намъ, числу; стало-быть, это неизв. число равно разности между одною третью и одною восемнадцатою долею единицы, т. е. $\frac{5}{18}$; эта дробь ($\frac{5}{18}$ единицы) представляетъ собою $\frac{5}{12}$ задуманнаго числа; стало-быть, задуманное число можно найти, отыскавъ сначала одну двѣнадцатую долю его, а потомъ—12 такихъ долей. — Особенную неясность въ задачи этого рода вноситъ равнодушіе учениковъ къ разницѣ между упомянутыми долями неизвѣстнаго числа и одною или нѣсколькими долями единицы. Первое стремленіе ученика, когда ему говорятъ, что къ пяти двѣнадцатымъ неизвѣстнаго числа прибавлена $\frac{1}{18}$, сводится къ сложенію дробей: $\frac{5}{12}$ и $\frac{1}{18}$. Но это нецѣлесообразное стремленіе проявляется тогда, когда ученики не пріучены учителемъ къ выразительному и сознательному чтенію задачи. Учитель поэтому долженъ сначала оттѣнять условіе, по которому есть громадная разница между частью неизвѣстнаго числа и частью единицы. — Сюда примыкаетъ извѣстная старинная задача о стадѣ гусей, *Задача о гусяхъ.* гласящая такъ: Летѣло стадо гусей, а имъ навстрѣчу летитъ еще гусь.—

„Здравствуйте, сто гусей!“ — говоритъ этотъ гусь стаду, а оттуда гусь ему отвѣчаетъ: „Здорово, пріятель! Но насъ не сто гусей; когда бы насъ было еще столько, сколько насъ есть на-лицо, да еще полъ-столька, да еще четверть-столька, да еще ты съ нами, то только тогда насъ было бы сто“. Сколько было гусей въ стадѣ?

Задачи о бассейнахъ. Сюда же примыкаютъ задачи о бассейнахъ: „Бассейнъ наполняется съ помощью двухъ крановъ; съ помощью одного онъ можетъ быть наполненъ въ теченіе 4 часовъ, а съ помощью другого—въ теченіе 6-ти часовъ; во сколько часовъ онъ можетъ быть наполненъ, если одновременно наполнять его съ помощью обоихъ крановъ?“ Рѣшеніе задачи о стадѣ гусей очевидно. Что же касается задачъ о бассейнахъ, то полезно предварительно проработать такія упражненія: 1) надо выкрасить полъ; одинъ маляръ берется это сдѣлать безъ всякой помощи въ 4 часа, а другой—въ 5 часовъ; ежели они будутъ работать вмѣстѣ (одинъ начнетъ окраску изъ одного угла, другой—изъ другого), то скорѣе ли они сдѣлаютъ работу?... 2) какую долю пола можетъ выкрасить первый изъ нихъ въ одинъ часъ?—какую долю — второй? — какую часть пола могутъ выкрасить оба, работая вмѣстѣ? (чуть-чуть не половину всего пола: $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$)... 3) а сколько времени имъ понадобится на окраску всего пола? (На окраску одной двадцатой доли пола требуется $\frac{1}{9}$ доля часа, а на окраску всего пола въ 20 разъ больше, т. е. $\frac{20}{9}$ ч.).

Трудность этого рѣшенія состоитъ въ томъ, какъ перевести на ариѳметическій языкъ слова „весь бассейнъ“, „весь полъ“, и т. д.? Сказать, что весь бассейнъ или весь полъ — одна единица, конечно, можно, но ученика это ничему не научитъ. Надо ему дать время для того, чтобы онъ могъ вполнѣ спокойно продумать и переварить, что сумма извѣстныхъ долей должна составлять часть единицы. Но на это должны быть употреблены и значительныя усилія, и многочисленныя упражненія.

§ 4. а) Задумано число; если къ нему прибавить 257, то получится вдвое болѣе, чѣмъ сколько задумано. Какое я задумалъ число?—Если къ неизвѣстному числу прибавить 257 единицъ, то получится удвоенное неизвѣстное число; но удвоенное неизвѣстное число можно получить изъ неизв. числа только въ томъ случаѣ, если къ неизв. прибавлено такое же число, какъ оно само; прибавлено 257 единицъ, и при этомъ получилось удвоенное неизвѣстное число; стало-быть, 257 и есть число, равное неизвѣстному.

Въ результатѣ дѣйствій входитъ неизвѣстное число.

б) Если удвоить неизв. число и къ полученному прибавить 360 единицъ, то получится учетверенное неизв. число.—Чтобы получить учетверенное неизв. число, къ удвоенному надо прибавить удвоенное же неизв. число...; прибавлено 360 единицъ, и все-таки получилось учетверенное неизв. число; стало-быть, 360 единицъ и представляютъ собою удвоенное неизв. число. И т. д.

в) Если къ удвоенному неизв. числу прибавить 360 единицъ, то получится утроенное неизвѣстное число, увеличенное на 150; какъ велико неизв. число? — Къ удвоенному неизв. числу прибавлено 360, а получилось не только утроенное число, но, кромѣ того, еще 150; стало-быть, чтобы получить только утроенное неизв. число къ удвоенному неизв. числу надо прибавить не 360, а число, меньшее, чѣмъ 360, на 150 единицъ, т. е. 210... Въ такомъ случаѣ 210 и есть неизв. число.

г) Если утроенное неизв. число увеличить на 314, то получится упятеренное неизвѣстное число, уменьшенное на 10 единицъ. Какъ велико неизвѣстное число?—Стало-быть, 314 не составляетъ удвоеннаго неизвѣстнаго числа, а меньше его на 10 единицъ. Слѣдовательно удвоенное неизвѣстное число равно $314+10$, т. е. 324 единицамъ, а одно неизвѣстное равно $324:2=162$.

д) Если изъ утроеннаго неизв. числа вычесть 146, то получится столько же, сколько получилось бы, если бы мы изъ удесятереннаго неизвѣстнаго числа вычли 846 единицъ. Какъ велико неизвѣстное число?—Если бы изъ утроеннаго не вычитать 146, то оно не равнялось бы тому, что получится послѣ вычитанія 846-ти единицъ изъ удесятереннаго неизвѣстнаго числа. Для того, чтобы получить утроенное неизвѣстное, изъ удесятереннаго неизвѣстнаго числа пришлось бы вычесть не 846 единицъ, а меньше, а именно на 146 единицъ меньше, т. е. пришлось бы вычесть 700 единицъ. Итакъ, если изъ удесятереннаго неизвѣстнаго числа вычесть 700 единицъ, то получилось бы утроенное неизвѣстное число; стало-быть, 700 представляетъ собою семь разъ взятое неизвѣстное число, а одно неизвѣстное число равно $700:7$, т. е. 100. — Подобныя задачи можно облечь и не въ столь отвлеченную форму; такова, напр., задача: „Продавая десятокъ лимоновъ по 65 коп., торговецъ получитъ на всемъ товарѣ 3 рубля прибыли; продавая же десятокъ по 50 коп., онъ получитъ всего 1 р. 50 коп. прибыли; сколько у него десятковъ лимоновъ?“—Продавая по 65 коп. десятокъ лимоновъ, торговецъ получилъ бы 3 р. прибыли; а продавая по 50 коп. каждый десятокъ, онъ получилъ бы 1 р. 50 коп. прибыли. Въ первомъ случаѣ онъ получилъ бы большую прибыль; почему? (Потому что онъ продавалъ бы дороже каждый десятокъ). На сколько въ этомъ случаѣ онъ выручилъ бы больше? (На 1 р. 50 к.) Откуда составился бы такой избытокъ? (Онъ составился бы изъ тѣхъ пятиалтынныхъ лишку, которыя торговецъ получалъ бы на каждомъ десяткѣ сверхъ тѣхъ 50-ти коп., которыя онъ могъ бы брать за десятокъ лимоновъ въ случаѣ, если бы онъ удовлетворялся прибылью въ 1 р. 50 коп.).—Легко увидѣть, что это разсужденіе очень тонко и требуетъ весьма значительнаго усилія сужденія. Обойти эту трудность невозможно; возможно только облегчить ее, предварительно проработавъ слѣдующій рядъ менѣе загроможденныхъ условіями упражненій: а) продавая аршинъ сукна по одной цѣнѣ, торговецъ могъ бы получить на остаткѣ сукна 70 руб. прибыли; продавая сукно по другой цѣнѣ, онъ могъ бы на томъ же остаткѣ получить 100 руб. прибыли; отъ чего это зависитъ? (отъ цѣны, по которой онъ будетъ продавать сукно); б) если продавать остатокъ сукна по болѣе низкой цѣнѣ за аршинъ, то большая ли при этомъ получится прибыль или меньшая? в) продавая аршинъ ситцу по 8-ми коп., торговецъ на всемъ своемъ ситцѣ получитъ убытку 237 р., а продавая его по 10-ти коп., онъ что получитъ? (неизвѣстно: можетъ быть, тоже убытокъ, но ужъ навѣрное меньшій, чѣмъ 237 руб., можетъ быть, и прибыль получитъ, а можетъ быть,—и продастъ товаръ безъ прибыли и убытку, т. е.

въ свою цѣну); г) продавая по одной цѣнѣ фунтъ чаю, торговецъ на всемъ чаѣ одного сорта получитъ убытокъ въ 460 руб.; продавая по другой цѣнѣ, онъ получилъ бы на немъ 215 руб. прибыли; отъ чего это зависитъ? (отъ цѣны за фунтъ); д) изъ чего составляется прибыль, получаемая съ неизвѣстнаго количества товара, продаваемаго по одной цѣнѣ? (она составляется путемъ сложенія всѣхъ прибылей, получаемыхъ на каждой единицѣ количества этого товара, — на каждомъ фунтѣ, десяткѣ, аршинѣ и т. д.); е) изъ чего составляется убытокъ, получаемый на всемъ товарѣ, который продается по одной цѣнѣ? ж) если при одномъ условіи какой-либо задачи получается одна прибыль, а при другомъ — другая, отъ чего зависитъ разность этихъ прибылей? (Отъ разности между продажною цѣною въ одномъ случаѣ и продажною цѣною въ другомъ). И т. д. — Само собою разумѣется, что и въ другихъ случаяхъ, а именно когда мы встрѣчаемся съ двумя убытками, или съ однимъ убыткомъ и одною прибылью, должно проработать подобный же рядъ упражненій, и въ послѣднемъ случаѣ рѣчь будетъ итти ужъ не о разности между одною прибылью и другой прибылью, а о нѣкоторой суммѣ, именно о всей выгодѣ, получаемой въ одномъ случаѣ сравнительно съ другимъ, дающимъ убытокъ.

Разность одна и та-же.

§ 5. Отцу 40 лѣтъ, а сыну 9; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вдвое старше сына?—Отецъ теперь старше сына на 31 годъ; число лѣтъ отца всегда равно суммѣ числа лѣтъ сына съ числомъ 31;...; когда отецъ будетъ вдвое старше сына, число лѣтъ отца тоже будетъ состоять изъ двухъ слагаемыхъ: числа лѣтъ сына и 31-го; стало-быть, удвоенное число лѣтъ сына будетъ равно числу лѣтъ сына, да еще 31-му, а потому сыну тогда будетъ 31 годъ; это будетъ черезъ сколько лѣтъ? (Черезъ 22 года)...—Провѣрить!—Эта задача можетъ подать учителю прекрасный поводъ къ выработкѣ въ умѣ учениковъ представленія, что если разность между двумя числами остается одна и та же, а самыя числа увеличиваются, то отношеніе большаго изъ нихъ къ меньшему, по мѣрѣ увеличенія обоихъ на одно и то же число, уменьшается: отцу 40 лѣтъ, а сыну 1 годъ, отецъ старше сына въ 40 разъ; отцу 41 годъ, а сыну 2, отецъ старше сына въ 20 разъ; отцу 42 года, а сыну 3,— и отецъ старше сына ужъ только въ 14 разъ, и т. д., отцу 60 лѣтъ, а сыну...? (21 годъ), и уже отецъ даже не втрое старше сына.—Это представленіе довольно важно для приданія нѣкоторымъ познаніямъ учениковъ, относящимся до четырехъ дѣйствій, большей опредѣленности и твердости.

Задачи о курьерахъ.

§ 6. а) Путешественникъ выѣхалъ изъ одного города, а другой изъ другого первому навстрѣчу, въ одно время; разстояніе между городами 100 верстъ; первый путешественникъ проѣзжаетъ въ часъ по 9 верстъ, а второй по 11 верстъ; черезъ сколько часовъ они встрѣтятся?—Въ теченіе одного часа первый приближался бы ко второму, если бы второй не трогался съ мѣста, на 9 верстъ; но второй тоже ѣдетъ и тоже приближается къ первому, но въ теченіе каждаго часа на 11 верстъ; стало-быть, по прошествіи каждаго новаго часа, путники приближаются другъ къ другу на 20 верстъ... — Сколько разъ 20 в. содержится въ 100 верстахъ, столько часовъ путники наши употребятъ на то, чтобы другъ съ другомъ съѣхаться.

б) Одинъ путешественникъ выѣхалъ и успѣлъ уже проѣхать 36 верстъ, проѣзжая все время по 9 верстъ въ часъ, когда другой выѣхалъ изъ того же города съ цѣлью догнать перваго; первый продолжаетъ ѣхать все по 9 в. въ часъ, а второй проѣзжаетъ въ часъ по 12-ти верстъ; черезъ сколько часовъ второй догонитъ перваго?—Считая съ той минуты, съ того момента, когда выѣхалъ второй, въ первый часъ второй путешественникъ приблизился ко второму на 3 версты, т. е. разстояніе между ними уменьшилось на 3 версты...— Почему?...— Въ теченіе слѣдующаго часа оба продолжаютъ ѣхать, но второй все-таки приблизился еще на 3 версты;...; и т. д.; стало-быть, сколько разъ 3 версты содержатся въ 36-ти верстахъ, столько часовъ потребуется для того, чтобы второй изъ нашихъ путниковъ догналъ перваго. — Изъ рѣшенія этой задачи явствуетъ, что иногда, при достаточной работѣ воображенія, способъ рѣшенія задачи, безъ помощи алгебры, приводитъ къ цѣли не только изящно, но и довольно быстро. Къ сожалѣнію, это не всегда такъ.

Вообще, при рѣшеніи многихъ задачъ алгебраическаго характера, какъ и при рѣшеніи всякихъ вопросовъ, должны работать не только сужденіе и вниманіе учениковъ, но и воображеніе ихъ. Если воображеніе учителя и учениковъ не работаетъ, трудно разсчитывать на интересъ учениковъ къ рѣшенію задачъ и на сколько-нибудь значительные успѣхи.

Б. Задачи съ двумя и тремя неизвѣстными.

Сумма и разность.

§ 7. а) Сумма двухъ чиселъ равна 85-ти, а разность ихъ 27; какъ велико каждое изъ нихъ?—Разрѣшеніе этой задачи одними разсужденіями, безъ помощи алгебры, только кажется простымъ; на самомъ же дѣлѣ оно часто требуетъ многихъ предварительныхъ упражненій.—Два числа одинаковы: каждое равно 67-ми; если изъ одного вычесть единицу, а къ другому ее прибавить, на сколько единицъ второе число станетъ больше прежняго? (На одну единицу)...—А на сколько оно будетъ больше, чѣмъ уменьшенное первое? (На двѣ единицы)... — Два числа одинаковы: каждое равно 68-ми; если отъ одного отнять 10 единицъ, а къ другому ихъ прибавить, на сколько единицъ послѣдній результатъ станетъ больше, чѣмъ результатъ вычитанія? (На 20 единицъ)... — У меня и у моего брата по сту рублей; я ему отдалъ изъ своихъ денегъ 25 рублей; на сколько у него стало больше, чѣмъ у меня? (На 50 руб.)...—Почему? (Потому-что, если-бы я только потерялъ 25 рублей, то и тогда у него стало бы больше, чѣмъ у меня, на 25 рублей; такъ какъ я не потерялъ ихъ, а ихъ ему отдалъ, то разность увеличилась еще на 25 руб.)...—Если каждое изъ двухъ чиселъ 175 и если отъ одного отнять 58 единицъ и ихъ прибавить къ другому, то на сколько второе число станетъ больше, чѣмъ первое? (На 116)...— И т. д...—Если два числа не равны между собою, напр. 80 и 30, то сколько единицъ надо отнять отъ большаго съ тѣмъ, чтобы, прибавивъ ихъ къ меньшему, получить поровну? (Половину пятидесяти)... — И т. д.—Одно изъ двухъ чиселъ болѣе другого на 30; сколько единицъ надо отнять отъ большаго, чтобы прибавивъ ихъ къ меньшему, получить одинаковыя числа? (Очевидно, 15)...— Упражненія! — Сумма двухъ

чиселъ 200; одно больше другого на 40; какъ велико каждое?.. — Если бы они были равны между собою, то каждое равнялось бы 100...—Для того, чтобы изъ двухъ равныхъ между собою сдѣлать два разныхъ числа, сумма которыхъ та же и изъ которыхъ одно больше другого на 40 единицъ, надо отъ одного отнять 20 ед. и ихъ прибавить ко второму; тогда получимъ два числа 120 и 80, которыя и представляютъ собою искомыя числа.—Кто изъ учителей непремѣнно желаетъ пріучить учениковъ къ почти алгебраическому, но безъ наглядной помощи буквъ, отвлеченно-словесному рѣшенію задачъ этого рода, безъ указанныхъ выше предварительныхъ упражненій, тому надо неоднократно проработать слѣдующія упражненія. Сумма двухъ чиселъ 100, ихъ разность 18; въ этой суммѣ двухъ чиселъ, т. е. въ ста единицахъ, содержится большее и меньшее; если къ меньшему прибавить число, равное разности, т. е. 18, то вмѣсто меньшаго мы получимъ большее, а отъ этого и сумма увеличится на 18 ед. Обратно: если мы къ суммѣ обоихъ чиселъ со стороны прибавимъ 18, то можно считать, что мы эти 18 ед. прибавили къ одному меньшему числу и полученное прибавили къ большему; отъ этого получилась новая сумма 118, но эта сумма содержитъ въ себѣ уже два такихъ числа, какъ большее; а одно такое число вдвое менѣе, чѣмъ 118.. — Вся трудность этого изящнаго, съ алгебраической точки зрѣнія, разсужденія именно въ томъ и заключается, что ученику чуждо соображеніе, по которому мы, прибавляя къ суммѣ двухъ, намъ неизвѣстныхъ чиселъ, какое-либо число, можемъ утверждать, что увеличили одно только, въ данномъ случаѣ, меньшее изъ этихъ двухъ чиселъ. Успѣхи, выказываемые учениками въ рѣшеніи задачъ этого рода, какъ въ томъ убѣждаетъ безпристрастное наблюденіе, чаще всего только кажущіеся. Ибо для истиннаго уразумѣнія этого отвлеченнаго разсужденія,—а разсужденія иного рода, кромѣ того, чаще всего еще и сомнительны въ отношеніи своей вѣрности и логичности, — требуется весьма значительная зрѣлость сужденія.—Конечно, то же самое справедливо и относительно вычитанія разности обоихъ чиселъ изъ суммы ихъ для опредѣленія величины удвоеннаго меньшаго числа.

Сумма двухъ чиселъ и другая ихъ связь.

б) Сумма двухъ чиселъ 100, одно болѣе другого въ 9 разъ; какъ велико каждое изъ нихъ? (См. § 20 главы VI-ой).

Сумма двухъ чиселъ 100; $\frac{3}{4}$ одного изъ нихъ равны $\frac{9}{10}$ другого; опредѣлить каждое изъ нихъ?—Если $\frac{3}{4}$ одной изъ частей равны $\frac{9}{10}$ другой, то $\frac{1}{4}$ первой равна $\frac{3}{10}$ второй, а вся первая равна $\frac{12}{10}$ второй или $\frac{6}{5}$ второй... И т. д.

в) Сумма двухъ чиселъ 450; если раздѣлить первое на второе, то въ частномъ получится 3, а въ остаткѣ 10; какъ велико каждое число?— Въ числѣ 450 содержится и большее, и меньшее; въ большемъ же содержится три меньшихъ да еще 10 единицъ; отнявъ 10 единицъ отъ большаго, мы и сумму обоихъ чиселъ уменьшимъ на 10 единицъ; обратно: отнявъ отъ суммы обоихъ чиселъ 10 единицъ, мы можемъ считать, что отняли эти 10 единицъ именно отъ большаго числа; а въ такомъ случаѣ 440 содержитъ въ себѣ три меньшихъ и еще одно меньшее...—Сюда же примыкаютъ задачи на такъ называемое смѣшеніе 2-го рода.

г) Извѣстно, что разность двухъ чиселъ равна 18-ти и что одно изъ нихъ болѣе другого въ 3 раза; спрашивается, какъ велики эти числа?—Разность чиселъ 18; это значитъ, что въ большемъ содержится меньшее число да еще 18 единицъ; но, по условію, большее число въ 3 раза больше меньшаго, стало-быть, въ 18-ти содержится два меньшихъ... — (Если какой-либо изъ учениковъ, или многіе изъ нихъ не сразу поймутъ это послѣднее рѣшеніе, то, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ, очень трудно безъ долгихъ и многочисленныхъ упражненій добиться какого либо цѣннаго результата. Только большое терпѣніе и настойчивость въ требованіяхъ, связанныя съ дѣятельною работою воображенія, могутъ здѣсь достигнуть цѣли).

Разность двухъ чиселъ и ихъ отношеніе.

д) Найти два числа, изъ которыхъ большее относится къ меньшему, какъ 9 : 4, если, кромѣ того, извѣстно, что разность между ними равна 65-ти.—Въ большей части 9 такихъ долей, какихъ въ меньшей 4, т. е.— въ большей такихъ долей болѣе на 5, чѣмъ въ меньшей, и эти 5 долей составляютъ 65 единицъ; стало-быть, каждая доля равна 13; и т. д.

Объ неизвѣстныя величины подвергаются измѣненіямъ.

§ 8. а) У двоихъ поровну денегъ; если первый отдастъ второму 40 руб., то у второго тогда станетъ втрое болѣе денегъ, чѣмъ у перваго; сколько у каждаго?—Когда первый отдастъ второму 40 рублей, у перваго станетъ на восемьдесятъ рублей меньше, чѣмъ у второго, и тогда у него будетъ втрое меньше. По разности двухъ чиселъ и ихъ отношенію можно найти эти числа.

б) У одного торговца на 1400 руб. болѣе, чѣмъ у другого; если бы первый изъ своихъ денегъ далъ второму 1100 руб., то у второго стало бы втрое болѣе денегъ, чѣмъ у перваго; ск. денегъ у каждаго?—У перваго больше, чѣмъ у второго, на 1400 руб.; если онъ отдастъ третьему лицу 1100 руб., то у него все-таки будетъ больше, чѣмъ у второго, на 300 рублей; если второй торговецъ получитъ отъ третьяго лица только 300 рублей, то у него станетъ столько же денегъ, сколько у перваго; если же третье лицо отдастъ второму торговцу всѣ 1100 руб., то тогда у второго станетъ болѣе, чѣмъ у перваго, на 800 руб., и тогда у него, по условію задачи, станетъ втрое болѣе, чѣмъ у перваго... По разности двухъ чиселъ и по отношенію ихъ легко найти эти числа.

Задача о пастухахъ.

Къ этому же роду задачъ принадлежитъ извѣстная старинная задача о пастухахъ, весьма полезная для ознакомленія учениковъ съ особенностями задачъ алгебраическаго характера. Надо считать крайне желательною такую проработку задачъ этого рода, которая дала бы ученикамъ возможность поработать вмѣстѣ съ учителемъ надъ этими задачами, причемъ учитель долженъ только помогать ученикамъ, при участіи всего класса, а не сводить дѣла къ одному только лекціонному „объясненію“, ни къ чему не ведущему, какъ бы оно хорошо ни было.

в) Одинъ пастухъ какъ-то разъ сказалъ другому: „подари мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и тогда у меня будетъ вдвое болѣе, чѣмъ у тебя“; другой отвѣтилъ: „отдай лучше ты мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и тогда у насъ будетъ поровну“; сколько овецъ у каждаго изъ нихъ?...—Повторите хорошенько задачу, чтобы не забыть ея условій!.. (Ср. § 15 гл. II.)

Обратимся ко второму условію! — Если второй отдастъ первому одну

изъ своихъ овецъ, то у нихъ будетъ поровну... — Что это значитъ? (Это значитъ, что у нихъ теперь не поровну)...—У кого изъ нихъ больше? (У перваго).—Почему? (Потому, что если бы у него было меньше, чѣмъ у второго, то послѣ того, какъ онъ отдастъ второму одну овцу, у него стало бы еще меньше, чѣмъ у второго)...—На сколько у перваго больше чѣмъ у второго? *)—Если-бы первый пастухъ отдалъ не второму, а третьему лицу, то у нашихъ двухъ пастуховъ стало бы поровну? (Нѣтъ).—У котораго было бы въ такомъ случаѣ все-таки больше, чѣмъ у другого? (У перваго)...—Почему? (Потому, что второй, по условію, долженъ былъ бы получить одну овцу, чтобы у нихъ было поровну, получилъ же овцу не онъ, а третье лицо)... — На сколько овецъ въ этомъ случаѣ у перваго больше, чѣмъ у второго? (На одну овцу)...—Почему? (Потому, что если бы второй получилъ ту овцу, которую получило третье лицо, то тогда у него стало бы столько же, сколько у перваго; стало-быть, второму одной овцы не хватаетъ для того, чтобы у него было столько же, сколько у перваго...) — А на сколько овецъ у перваго пастуха на самомъ дѣлѣ было болѣе, чѣмъ у второго? (На двѣ овцы)... — Почему? (Потому, что въ случаѣ если первый отдастъ третьему лицу одну овцу, то у перваго будетъ на одну овцу болѣе, чѣмъ у второго, а если онъ отдавать овецъ никому не станетъ, то у него тогда будетъ еще одной овцою болѣе, чѣмъ сколько ихъ у второго)...—Итакъ, на самомъ дѣлѣ, у перваго пастуха болѣе овецъ, чѣмъ у второго, на двѣ штуки...—Повторите съ самаго начала все разсужденіе...—Теперь обратимся къ первому условію!...—Пусть второй отдастъ первому одну изъ своихъ овецъ, что тогда произойдетъ? (У перваго станетъ вдвое болѣе, чѣмъ у второго)... — Хорошо! Но на сколько овецъ у перваго станетъ болѣе, чѣмъ у второго? **)...—Если бы второй пастухъ отдалъ одну изъ своихъ овецъ третьему лицу, то и тогда у перваго стало бы..? (Еще на одну овцу больше, чѣмъ у второго)...—А если эту овцу первый получитъ отъ третьяго лица, то у него станетъ больше, чѣмъ у второго, еще на двѣ овцы...—Итакъ, у перваго пастуха послѣ того, какъ онъ возьметъ у второго одну овцу будетъ уже на четыре овцы больше...—Почему на четыре? (Потому что у него и безъ того было на двѣ овцы больше, чѣмъ у второго, а послѣ полученія одной овцы отъ второго, у перваго стало еще на двѣ овцы больше, чѣмъ у второго)... Но по условію..? По (условію у него въ этомъ случаѣ оказалось вдвое больше, чѣмъ у второго пастуха)...—Что же, такимъ образомъ, намъ извѣстно о томъ числѣ овецъ, которое окажется у перваго и у второго пастуховъ послѣ того, какъ второй отдастъ первому одну изъ своихъ овецъ? (Намъ извѣстно, что въ такомъ случаѣ у перваго пастуха станетъ болѣе, чѣмъ у второго, вдвое,— это намъ извѣстно изъ условія,—и кромѣ того, мы разсчитали, что въ

*) На этотъ вопросъ ученики почти неизбѣжно даютъ неправильный отвѣтъ, если они никогда не рѣшали задачъ этого рода. Многоточія означаютъ необходимость упражненій въ предшествующемъ многоточію.

**) На этотъ вопросъ ученики почти неизбѣжно даютъ неправильный отвѣтъ, помня только то, что у перваго прибавится одна овца, и забывая что у второго одною станетъ меньше.

такомъ случаѣ у перваго будетъ болѣе, чѣмъ у второго, на четыре овцы)...—Что же изъ этого слѣдуетъ?..—Изъ этого слѣдуетъ вотъ что: у перваго столько же, сколько у второго, да еще столько же,—по условію;...; но у перваго (мы это разсчитали!) столько же, сколько у второго, да еще четыре овцы;...; стало-быть, четыре овцы и представляютъ собою то число овецъ, которое у второго...—Итакъ, у второго будетъ четыре, а у перваго—восемь овецъ послѣ того, какъ второй одну изъ своихъ овецъ отдастъ первому...—Стало-быть, на самомъ дѣлѣ у перваго 7 овецъ; а у второго 5...

§ 9. а) 4 аршина бархата и 7 аршинъ сукна обошлись вмѣстѣ въ 68 р.; куплено въ другой разъ тоже 4 арш. бархата, но 9 аршинъ сукна, и это обошлось въ 76 руб.; что стоитъ аршинъ бархата и что аршинъ сукна? Очевидно, что два аршина сукна стоятъ 8 руб.! И т. д.—Рѣшеніе задачъ этого рода должно быть начинаемо именно со случаевъ очевидныхъ, которыхъ учитель можетъ и самъ придумать сколько угодно. Послѣ этого можно предлагать задачи слѣдующаго рода:

$$\begin{aligned} ax+by&=c.\\ mx+ny&=d. \end{aligned}$$

б) 4 аршина бархата и 7 аршинъ сукна стоятъ 68 р., а 2 аршина бархата и 5 арш. сукна стоятъ 40 руб.; что стоитъ аршинъ бархата и что — аршинъ сукна? — Рѣшать и записывать неалгебраическое рѣшеніе надо, примѣрно, такъ:

7 арш. бархата и 9 арш. сукна стоятъ 115 руб.
8 „ „ „ 4 „ „ „ 110 „

Купимъ въ 8 разъ больше, чѣмъ въ первый разъ, и въ 7 разъ больше, чѣмъ во второй, и тогда у насъ получится слѣдующая задача:

56 арш. бархата и 72 арш. сукна стоятъ 920 р.
а 56 „ „ „ 28 „ „ „ 700 „ и т. д...

в) Аршинъ сукна и аршинъ бархата стоятъ вмѣстѣ 10 руб. 80 к., а 25 арш. сукна стоятъ столько же, сколько 11 арш. бархата; что стоитъ аршинъ сукна и что — аршинъ бархата?—Купимъ 25 арш. сукна и 25 арш. бархата; тогда мы заплатимъ 270 р., а теперь замѣнимъ 25 арш. сукна одиннадцатью аршинами бархата, такъ какъ...? (такъ какъ 25 арш. сукна стоятъ столько же, сколько 11 арш. бархата)...—Тогда мы разсчитаемъ, что 36 арш. бархата обошлись бы въ 270 руб...

г) Мальчикъ скопилъ двухкопеечными и трехкопеечными монетами 3 р. 22 коп.; трехкопеечныхъ монетъ у него оказалось вдвое меньше, чѣмъ двухкопеечныхъ монетъ; сколько у него было монетъ двухкопеечнаго и сколько трехкопеечнаго достоинства? — Двухкопеечныхъ монетъ у него четное количество; почему?.. — Если онъ сложитъ ихъ въ кучки по двѣ монетки въ каждой, то такихъ кучекъ будетъ у него столько же, сколько у него трехкопеечныхъ монетъ; если онъ къ каждой кучкѣ, содержащей по двѣ двухкопеечныхъ монеты, прибавитъ одну трехкопеечную, то у него во всѣхъ кучкахъ будетъ поровну денегъ, а именно по 7-ми коп., и такихъ кучекъ будетъ какъ-разъ столько, сколько у него трехкопеечныхъ монетъ...—Чтобы узнать число этихъ послѣднихъ, надо 352 раздѣлить на 7.—Эта задача до очевидности ясно показываетъ— насколько

иногда пріемы рѣшенія безъ помощи икса требуютъ большей изобрѣтательности, чѣмъ рѣшеніе задачи съ помощью икса.

д) Если бы въ саду было 15-ю грушевыми деревьями больше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ, то грушевыхъ деревьевъ было бы вдвое меньше, чѣмъ яблонь. Сколько яблонь и сколько грушевыхъ деревьевъ въ этомъ саду, если тѣхъ и другихъ въ немъ 735 штукъ? — Деревьевъ того и другого рода 735; прибавимъ еще 15 грушъ; тогда всѣхъ деревьевъ будетъ 750 штукъ, и тогда яблонь будетъ вдвое болѣе, чѣмъ грушъ, и т. д.—Здѣсь трудность чисто словесная; надо разобраться, какъ примѣнить условіе, выраженное предположительно: „е с л и б ы въ саду было“ и т. д.

е) Казначей разсчиталъ, что у него въ кассѣ пятирублевыхъ и десятирублевыхъ бумажекъ на 1310 руб. и что если бы 8 пятирублевыхъ бумажекъ замѣнить десятирублевыми, то тогда пятирублевыхъ бумажекъ въ кассѣ было бы втрое болѣе, чѣмъ десятирублевокъ. Сколько въ кассѣ пятирублевокъ, сколько десятирублевокъ? — Если 8 пятирублевокъ, т. е. 40 руб., замѣнить десятирублевками, т. е. 80-тью рублями, то сумма денегъ, т. е. 1310 руб., увеличится на 40 руб., и въ кассѣ получится 1350 р.; но тогда въ кассѣ будетъ втрое болѣе пятирублевокъ, чѣмъ десятирублевокъ; сложимъ пятирублевки въ пачки по три бумажки въ каждой, и такихъ пачекъ будетъ столько же, сколько десятирублевокъ; присоединимъ къ каждой пачкѣ по красненькой бумажкѣ, и тогда всѣ деньги, т. е. 1350 р., будутъ уложены въ пачки по 25 р. въ каждой пачкѣ... — Такихъ пачекъ будетъ столько, сколько разъ 25 содержится въ 1350, т. е. 54; стало-быть, десятирублевокъ въ этомъ случаѣ будетъ тоже 54; но столько пачекъ стало послѣ того, какъ 8 пятирублевокъ замѣнены красненькими, а потому у кассира на самомъ дѣлѣ десятирублевокъ было 46 штукъ.

Три неизвѣстныхъ числа.

§ 10. а) Задуманы три числа; сумма первыхъ двухъ 20; сумма второго и третьяго 30; сумма перваго и третьяго 40; какъ велики задуманныя числа?—Сумма второго и третьяго больше, чѣмъ сумма второго и перваго, на 10 единицъ; стало-быть, первое меньше третьяго на 10 единицъ; это мы р а з с у д и л и; но изъ задачи и з в ѣ с т н о, что сумма перваго и третьяго равна 40; стало-быть, и т. д.

б) Сумма трехъ чиселъ 1000; если раздѣлить первое на третье, то въ частномъ получится 3; отъ раздѣленія второго на третье въ частномъ получится 2, а въ остаткѣ 100; найти эти три числа. — Второе содержитъ два такихъ числа, какъ третье, да еще 100, а первое содержитъ три такихъ числа, какъ третье, и такъ далѣе.

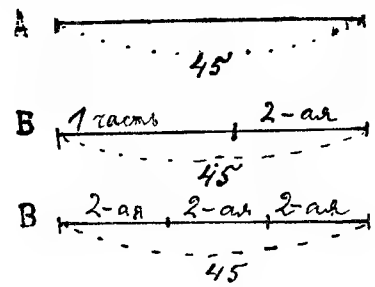
Прямая линія какъ наглядное пособіе.

§ 11. Прямая линія можетъ (см. § 3 гл. II) служить превосходнымъ наглядимъ пособіемъ вообще при обученіи ариѳметикѣ. Прежде всего она должна вычерчиваться учителемъ и учениками для полнаго наглядаго усвоенія послѣдними длины слѣдующихъ единицъ мѣры: вершка, дюйма и центиметра. Далѣе она можетъ служить для лучшей выработки въ умѣ учениковъ представленій о томъ, что означаютъ слова: «цѣлое», «часть», «нѣсколько одинаковыхъ долей цѣлаго», «доля цѣлаго» и т. п. Съ помощью прямой линіи легко выясняется, что если требуется раздѣлить цѣлое на 6 одинаковыхъ частей, то сначала

можно цѣлое раздѣлить по-поламъ, а потомъ—каждую половину на три одинаковыя части и т. п. Засимъ она можетъ сослужить великую службу при приведеніи двухъ дробей къ одному знаменателю, при выясненіи нахожденія части цѣлаго, при выясненіи нахожденія цѣлаго по данной части его, и т. п. Важно при этомъ, что ученики начальной школы, будучи въ состояніи самостоятельно поработать надъ какимъ-либо вопросомъ намѣченнаго содержанія съ помощью прямой линіи, пріобрѣтаютъ не только ясныя и отчетливыя представленія, но упражняются также въ нѣкоторомъ рисованіи и черченіи и тѣмъ восполняютъ неизбѣжные пробѣлы въ ихъ образованіи. Учитель, у котораго хватило мужества и умѣнія оставить путь отвлеченныхъ, требующихъ большого и часто непосильнаго для учениковъ усилія воображенія разсужденій и вступить на простой путь геометрическаго истолкованія нѣкоторыхъ ариѳметическихъ представленій, никогда объ этомъ не пожалѣетъ и никогда этого послѣдняго пути не оставитъ.

Рѣшеніе задачъ алгебраическаго характера.

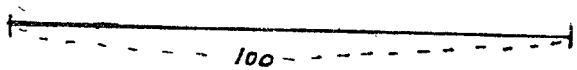
§ 2. Пусть предложена, задача на такъ наз. пропорціональное раздѣленіе: «раздѣлить 45 рублей на двѣ такія двѣ части, чтобы одна была больше другой въ два раза».



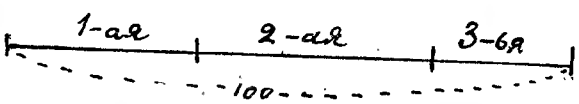
Предположимъ, что первая прямая содержитъ 45 кусковъ одинаковой длины и представляетъ собою 45 р у б л е й (вотъ здѣсь требуется нѣкоторое усиліе ума, и его не преминетъ, хотя и не сразу, но вполнѣ своевременно сдѣлать даже слабый ученикъ). Эту прямую А требуется раздѣлить на двѣ такія части, чтобы одна была больше другой въ два раза. Раздѣлить ее на двѣ не одинаковыя части (чертежъ Б), и пусть первая изъ нихъ въ два раза болѣе второй. (Если ученики не вѣрно раздѣлятъ, тѣмъ лучше; они тогда убѣдятся въ томъ, что дѣлить надо не зря, и еще лучше уяснятъ себѣ—въ чемъ дѣло). — Тогда первая часть содержитъ въ себѣ такихъ частей, какъ вторая, двѣ, и мы получимъ изображенное на чертежѣ В (см. выше). Стало-быть, эти 45 е д и н и ц ъ (опять шагъ впередъ!) составляютъ 3 такихъ части, изъ которыхъ каждая равна второй; а потому вторая содержитъ въ себѣ въ три раза меньше 45-ти единицъ, и т. д.

Пусть намъ предложена задача (нарочно возьмемъ болѣе сложную): раздѣлить 100 единицъ на такія три части, чтобы онѣ были пропорціональны числамъ 7, 8 и 5.—Это значитъ, что въ первой части нѣкоторое

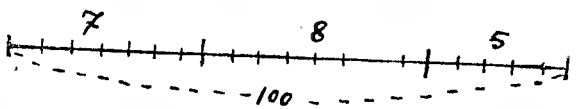
число содержится 7 разъ, во второй то же число содержится 8 разъ, а въ третьей—5 разъ. Предположимъ, что прямая



содержитъ 100 единицъ; она должна быть раздѣлена на три неодинаковыя части, — первая должна быть меньше второй, а третья меньше первой. Хорошо! Раздѣлимъ эту прямую на три неодинаковыя части, напр., такъ:



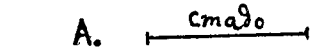
и пусть первая меньше 2-ой, а 3-я меньше 1-ой. (Если при этомъ ученики совершили это дѣленіе невѣрно, опять-таки тѣмъ лучше: тогда они лучше поймутъ, въ чемъ здѣсь дѣло, и это справедливо относительно каждой изъ послѣдующихъ задачъ, такъ что больше объ этомъ упоминать не стоитъ). — Далѣе, по условію, въ первой части нѣкоторый кусокъ долженъ содержаться 7 разъ, во второй тотъ же кусокъ долженъ содержаться 8 разъ, а въ третьей — 5 разъ. Поэтому мы должны получить такой чертежъ:



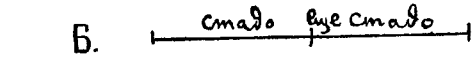
Во всей прямой этотъ кусочекъ будетъ заключаться сколько разъ? (20 разъ). — Сколько единицъ во всей прямой? (100). — А сколько единицъ въ каждомъ кусочкѣ? (5).—А сколько въ первой части? (35).—А во второй? (40).—А въ третьей? (25).

Само собою разумѣется, что такихъ задачъ должно рѣшить нѣсколько, и тогда ученикамъ выяснится причина, почему здѣсь все дѣло только въ раздѣленіи даннаго числа на сумму чиселъ, которымъ пропорціональны искомыя части.

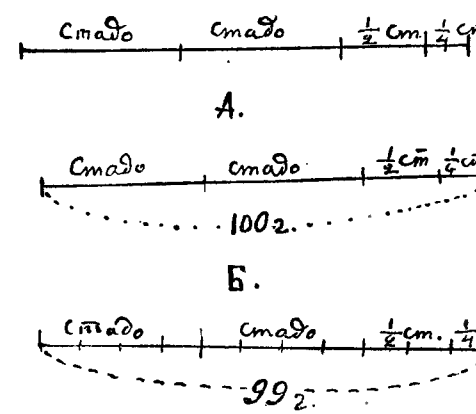
Задачи надъ задуманными числами (задачи-загадки) принадлежатъ къ числу столь легкихъ въ смыслѣ ариѳметическомъ и, надо сказать правду, столь безплодныхъ, что примѣнять къ ихъ рѣшенію прямую линію не стоитъ. Другое дѣло, если дѣйствіе производится надъ частями и долями задуманнаго числа. Здѣсь прямая линія можетъ оказать иногда неоцѣненныя услуги. — Пусть предложена знаменитая старинная задача „о стадѣ гусей“: летѣло стадо гусей, имъ попался на-встрѣчу гусь; „здравствуйте, сто гусей!“ сказалъ онъ стаду, а ему отвѣтили: „нѣтъ, насъ не сто гусей; когда бы насъ было еще столько, сколько насъ теперь, да еще полъ-столька, да еще четверть-столька, да еще ты, гусь, съ ними, то насъ было бы сто“; сколько гусей въ этомъ стадѣ? — Пусть въ этомъ стадѣ вотъ сколько гусей (опять усиліе мысли и воображенія!):



Если прибавить еще столько, то получится:



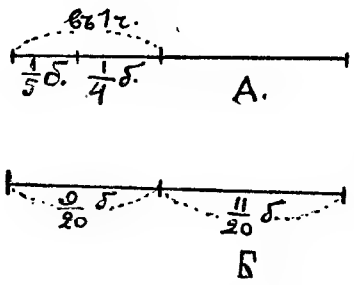
Если прибавить еще полъ-столька да еще четверть-столька, то получится (чертежъ А):



Если прибавить еще одного гуся и если этого гуся обозначить маленькой черточкой (новая, но естественно вытекающая изъ всего разсужденія, идея!), то получимъ чертежъ В (см. выше). Въ этомъ чертежѣ послѣдній отрѣзокъ обозначаетъ одного гуся. Въ остальныхъ же частяхъ 99 „гусей“, причемъ остальное состоитъ изъ двухъ стадъ да еще половины стада да еще четверти стада, т. е. изъ двухъ стадъ съ тремя четвертями такого же стада. Узнаемъ, сколько здѣсь всего четвертей стада, получимъ новый чертежъ В, изъ котораго очевидно, что гусей 99, а четвертей стада счетомъ 11 (4 въ одномъ стадѣ, еще 4—въ другомъ такомъ же стадѣ, двѣ—въ половинѣ стада, и одна—въ четверти). И т. д.

Часто встрѣчаются въ задачникахъ задачи о бассейнахъ, такъ какъ ихъ составленіе не требуетъ отъ составителей никакого труда и размы-

шленія. — Возьмемъ задачу, гласящую такъ: „бассейнъ наполняется двумя кранами; однимъ онъ можетъ быть наполненъ въ 4 часа, а другимъ въ 5 часовъ; во сколько времени наполнится пустой бассейнъ, если открыть оба крана?“ Пусть нѣкоторая прямая изображаетъ величину всего бассейна (еще лучше, если это — прямая отвѣсная, вертикальная: тогда нижнія части прямой лучше сближаютъ наполненіе бассейна съ составомъ прямой изъ частей). Первый кранъ наполняетъ его въ 5 часовъ, стало-быть, въ часъ наполнится чрезъ этотъ кранъ только одна пятая доля, а черезъ второй—одна четверть бассейна (чертежъ А).



Такъ какъ второй кранъ въ тотъ же часъ наполнитъ еще четверть бассейна, то обоими кранами въ часъ наполнятся (см. черт. А) одна пятая да одна четверть; сколько долей бассейна? (Одна пятая $\frac{4}{20}$, а одна четверть—$\frac{5}{20}$, вмѣстѣ $\frac{9}{20}$). Осталось еще $\frac{11}{20}$ долей бассейна (черт. Б). Теперь ужъ можно разсуждать такъ: на $\frac{9}{20}$ бассейна понадобился часъ времени, еще на $\frac{9}{20}$ понадобится также одинъ часъ, итого пройдетъ 2 часа, и останутся не наполненными только $\frac{2}{20}$ доли бассейна. Для одной двадцатой доли бассейна необходима $\frac{1}{9}$ доля часа, а для двухъ двадцатыхъ—$\frac{2}{3}$ доли часа, т. е. 120 м. : 9 = 13 $\frac{2}{3}$ минуты. И т. д.

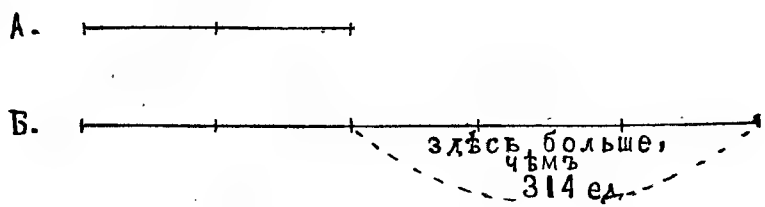
Какъ ни странно уподобленіе бассейна прямой линіи (впрочемъ, не болѣе странно, чѣмъ уподобленіе стада гусей—прямой линіи), но опытъ показываетъ, что эта трудность ничтожна по сравненію съ тѣми, которыми преисполнено отвлеченное „разсужденіе“ надъ отвлеченными числами, ничего не говорящими ни уму, ни воображенію учениковъ *).

Изъ другихъ задачъ съ одною неизвѣстною величиною видное мѣсто занимаютъ задачи, приводящія, при алгебраическомъ способѣ рѣшенія задачъ, къ уравненіямъ вида

$$ax + b = cx + d.$$

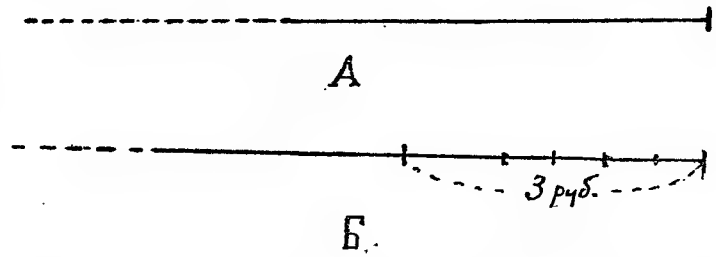
Возьмемъ задачу этого рода, не принадлежащую къ числу самыхъ легкихъ: „если удвоенное неизвѣстное число увеличить на 314, то получится упятеренное неизвѣстное число, уменьшенное на 10 единицъ“. Пусть нѣкоторая прямая линія изображаетъ это неизвѣстное число; тогда удвоенное неизвѣстное число изобразится такъ (чертежъ А):

*) Для полной оцѣнки значенія прямой линіи, какъ наглядnаго пособія при обученіи ариѳметикѣ, необходимо принять къ свѣдѣнію, что это—первый шагъ къ графическому изображенію разныхъ числовыхъ соотношеній, т. е. къ тому изображенію, которое охватываетъ все большее и большее поле въ описаніи явленій, въ установкѣ и описаніи фактовъ и въ изложеніи законовъ разнаго рода.

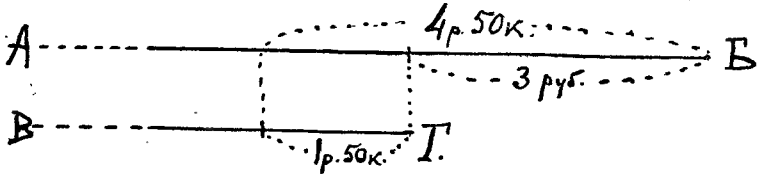


Прибавимъ еще 314 единицъ въ видѣ нѣкоторой четвертой прямой линіи; но эта четвертая прямая линія должна быть такой длины, чтобы получилось упятеренное неизвѣстное число, уменьшенное на 10 единицъ. Стало-быть, отъ прибавленія 314-ти единицъ къ удвоенному неизвѣстному числу не получится упятереннаго неизвѣстнаго числа: упятеренное число больше. На сколько больше? (на 10 единицъ).—Прибавимъ утроенное неизвѣстное число; въ утроенномъ неизвѣстномъ числѣ сколько единицъ? (314 + 10, т. е. 324 единицы). — А въ такомъ случаѣ въ неизвѣстномъ числѣ 324 : 3, т. е. 108 единицъ.

Къ этому же, строго говоря, роду задачъ, съ точки зрѣнія чисто-алгебраической, принадлежатъ также задачи слѣдующаго типа: „продавая десятокъ лимоновъ по 65 коп., торговецъ получитъ на всемъ товарѣ 3 руб. прибыли; продавая же десятокъ по 50 коп., торговецъ получитъ 1 руб. 50 коп. убытку; сколько у него десятковъ лимоновъ?“ Пусть нѣкоторая прямая обозначаетъ 65 коп., а другая прямая (меньшая) пусть обозначаетъ 50 коп. Мы не знаемъ, сколько было десятковъ лимоновъ. Возьмемъ прямую неопредѣленной длины (новая идея!), которой конецъ справа обозначенъ сплошною чертою, а начало теряется слѣва на чертежѣ въ видѣ пунктира:

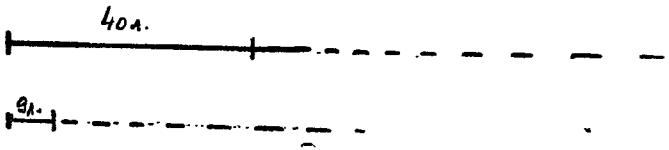


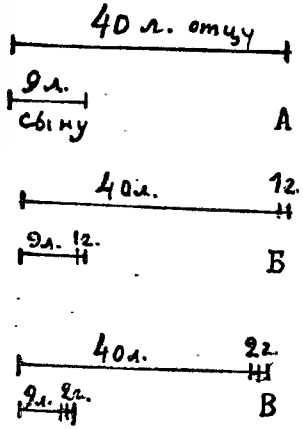
Пусть прямая линія А обозначаетъ всю сумму вырученныхъ торговцемъ денегъ, если онъ продастъ лимоны по 65 коп. за десятокъ. Тогда нѣкоторая опредѣленная часть прямой справа будетъ обозначать 3 р. прибыли. Обозначимъ это на прямой Б. Тогда то, что выручилъ бы торговецъ, продавая лимоны по 50 коп., по сравненію съ прежнимъ, изобразилось бы лѣвою частью прямой ВГ:



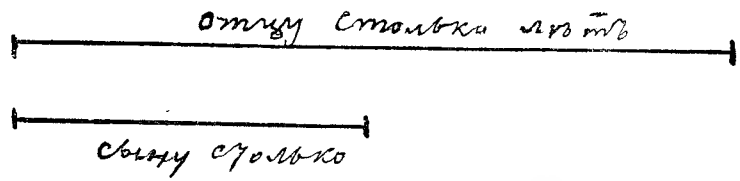
Изъ этихъ двухъ прямыхъ АБ и ВГ первая выражаетъ все, что торговецъ выручилъ бы, продавая лимоны по 65 коп., а лѣвая часть второй—что онъ выручитъ бы, продавая лимоны по 50 коп. за десятокъ. Разность между этими двумя величинами—1 р. 50 коп., и весь вопросъ только въ томъ, откуда эта разность образовалась.—Остальное уже ясно.

Съ помощью прямой неопредѣленной длины рѣшаются задачи въ родѣ слѣдующей: „отцу 40 лѣтъ, а сыну 9; чрезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вдвое старше сына?“—Въ переводѣ на геометрическій языкъ это значитъ, что надо прибавить къ двумъ прямымъ поровну, но чтобы при этомъ первая получилась вдвое больше 2-ой.

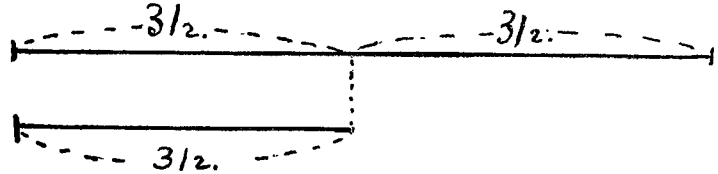




Пусть эта задача рѣшена такъ (черт. А): По прошествіи одного года, и отецъ, и сынъ станутъ старше прежняго на годъ,—прибавлю по одному году (чертежъ Б). По прошествіи еще года и отецъ, и сынъ опять-таки станутъ старше прежняго на годъ,—прибавлю еще по году (черт. В), и т. д.—Изъ этого ученики должны вывести, что отецъ все время остается старше сына на 31 годъ и что это — самое важное для рѣшенія задачи. (Практику-учителю извѣстно, что именно это обстоятельство ускользаетъ отъ вниманія учениковъ, работающихъ только надъ отвлеченными числами). Когда это выяснилось в о о ч і ю, вопросъ получаетъ уже такой оборотъ (возьмемъ новыя прямыя):

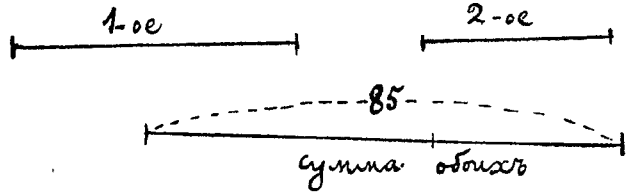


Первая прямая все время больше второй на 31 единицу; нужно найти, когда она будетъ въ два раза длиннѣе 2-ой прямой (здѣсь опять появляются неопредѣленной длины прямыя!). Пусть первая прямая дѣйствительно болѣе 2-ой вдвое, тогда

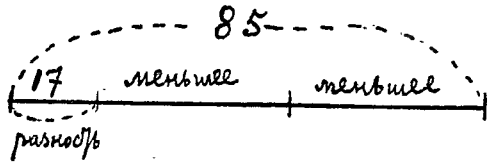


первая прямая и вдвое болѣе второй, и въ то же время на 31 единицу болѣе 2-ой. А потому въ первой прямой второй кусокъ долженъ равняться 31 единицѣ, и первый—тоже 31 единицѣ. Это значитъ, что отецъ станетъ вдвое старше сына тогда, когда сыну будетъ 31 годъ, т. е. чрезъ сколько лѣтъ? (чрезъ 22 года).—Тогда отцу будетъ 62 года, а сыну 31.

На разныхъ задачахъ „о курьерахъ“ не станемъ останавливаться, такъ какъ тамъ приложеніе прямой линіи настолько очевидно, что читатель навѣрное и самъ не откажется проработать задачи эти съ помощью чертежей. Обратимся лучше къ задачамъ съ двумя и тремя неизвѣстными. Самыми обычными среди задачъ этого рода являются задачи, въ которыхъ по данной суммѣ и данной разности двухъ чиселъ требуется найти каждое изъ нихъ.—Пусть сумма двухъ чиселъ равна 85-ти, а разность 27-ми. Тогда поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

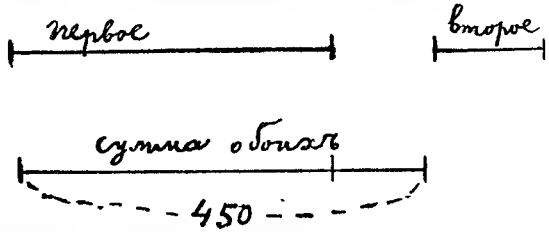


Чтобы найти разность этихъ двухъ чиселъ, отложимъ меньшее изъ нихъ справа налѣво на большее:

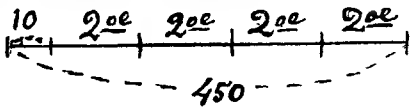


Всматриваясь въ этотъ чертежъ, видимъ, что вся прямая содержитъ 85 единицъ, одна часть ея 17, остальное составляетъ 85—17, т. е. 68. Поэтому меньшее изъ данныхъ чиселъ равно половинѣ 68-ми, т. е. 34-мъ единицамъ.

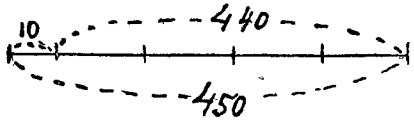
Возьмемъ слѣдующую, болѣе сложную, задачу: „сумма двухъ чиселъ 450; если раздѣлить первое на второе, то въ частномъ получится 3, а въ остаткѣ 10“. — Сколько разъ второе содержится въ первомъ? (Очевидно, 3 раза съ лишкомъ). Обращаюсь къ чертежу:



Второе должно умѣститься въ первомъ 3 раза, и при этомъ долженъ получиться остатокъ въ 10 единицъ; отложимъ:

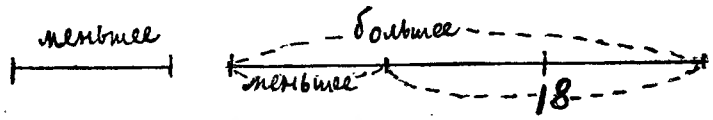


На эти четыре куска, изъ которыхъ каждый изображаетъ второе число приходится 440 единицъ:



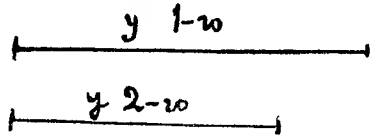
На каждый кусокъ приходится 110 единицъ. И т. д.

„По разности двухъ чиселъ, которая равна 18-ти, найти оба числа, если извѣстно, что одно изъ нихъ болѣе другого въ 3 раза“.—Меньшее содержится въ большемъ три раза, причемъ разность между большимъ и меньшимъ 18 единицъ, стало-быть

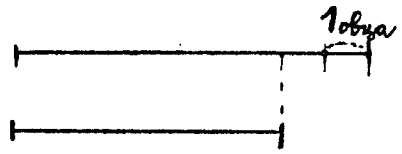


А потому меньшее равно 18 : 2, т. е. 9-ти, и т. д.

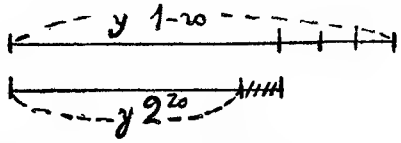
Къ числу трудныхъ задачъ алгебраическаго характера принадлежатъ тѣ задачи съ двумя неизвѣстными, въ которыхъ обѣ неизвѣстныя величины подвергаются измѣненіямъ, и мы знаемъ только извѣстныя соотношенія между данными величинами и между результатами помянутыхъ измѣненій. Такова, напр., весьма древняя задача о пастухахъ: „два пастуха встрѣтились и одинъ сказалъ другому: дай мнѣ одну овцу, и у меня будетъ тогда вдвое болѣе, чѣмъ у тебя; въ отвѣтъ на это другой сказалъ: отдай мнѣ одну изъ своихъ, и тогда у насъ будетъ поровну; сколько овецъ у каждаго изъ нихъ?“ — Прежде всего: не поровну ли у нихъ и теперь? Положимъ, что поровну (это очень полезный въ методическомъ отношеніи пріемъ); тогда число овецъ у каждаго изображалось бы прямыми одинаковой длины. Но стоитъ, по условію, одну „овцу“ (кусокъ первой прямой) отнять отъ перваго и отдать второму, и мы не получимъ, что у нихъ послѣ этого т о ж е будетъ поровну; стало-быть, у нихъ не могло быть поровну вначалѣ. У котораго же изъ нихъ больше? (Конечно, у перваго). Тогда



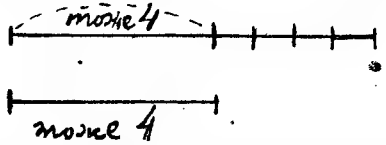
Какой длины кусокъ изображаетъ одну овцу, или: сколько надо отрѣзать отъ верхней прямой, чтобы этимъ отрѣзкомъ уравнять обѣ линіи? Пробуемъ и видимъ, что одна



овца изображается небольшимъ кускомъ и что у перваго пастуха на д в ѣ овцы больше, чѣмъ у второго. Это—уже важный выводъ. Теперь отнимемъ у второго пастуха одну овцу и отдадимъ ее первому; получимъ чертежъ

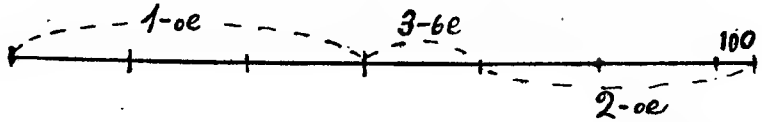


Зачеркнутая часть второй прямой и крайняя правая первой обозначаютъ овцу, отданную вторымъ пастухомъ первому. Послѣ этого останется сравнить полученныя прямыя



чтобы увидѣть, что у перваго пастуха станетъ больше, чѣмъ у второго, на четыре овцы. Но, по условію, у него будетъ вдвое болѣе, чѣмъ у второго; стало-быть, у второго будетъ четыре овцы, а у перваго—восемь. Столько будетъ у каждаго, когда второй дастъ первому одну овцу. И. т. д.

Само собою разумѣется, что можетъ встрѣтиться такая алгебраическая задача съ двумя и даже съ одною неизвѣстною величиною, для разрѣшенія которой съ помощью прямой линіи требуется нѣкоторое остроуміе. Но, во-первыхъ, остроуміе потребовалось бы также для разрѣшенія той же задачи и безъ помощи прямой линіи; во-вторыхъ, самая попытка къ облеченію задачи въ геометрическія формы попутно можетъ разъяснить ученику сущность задачи настолько, что ему скорѣе, чѣмъ при отвлеченномъ рѣшеніи ея, придетъ въ голову надлежащій пріемъ рѣшенія. — Возьмемъ задачу съ тремя неизвѣстными: „сумма трехъ чиселъ 1000; если первое раздѣлить на третье, то въ частномъ получится 3; если второе раздѣлить на третье, то въ частномъ получится 2, а въ остаткѣ 100“. Очевидно, что и первое, и второе больше третьяго; по условію же сумма всѣхъ трехъ изобразится слѣдующею прямою:



А въ такомъ случаѣ въ шести прямыхъ, изъ которыхъ каждая изображаетъ третье число, содержится 900 единицъ. — Если ученики догадаются, что лучше было бы сначала отложить третье число, затѣмъ—первое, и наконецъ—второе, хорошо. Если же не догадаются сразу, а сообразятъ потомъ, тоже хорошо: они это сообразятъ своевременно.

Во избѣжаніе какихъ-либо недоразумѣній, слѣдуетъ помнить: 1) здѣсь чертежи приведены такъ, что какъ-только понадобилось измѣнить чертежъ, мы тотчасъ же беремъ другой, чтобы такимъ образомъ имѣть возможность усмотрѣть весь ходъ измѣненія чертежа; на практикѣ же рѣшеніе можно проводить, конечно, и на одномъ чертежѣ; 2) выше приведены не самые изящные, а самые согласные съ условіями предложенныхъ задачъ, способы рѣшенія ихъ; введеніе же болѣе изящныхъ пріемовъ — дѣло изобрѣтательности, — притомъ изобрѣтательности не учителя (это было бы навязчиво и худо), а самихъ учениковъ (это — только и хорошо!); 3) если задача ученикамъ безъ всякаго участія учителя дается почему-либо легко, то введеніе прямой линіи, какъ средства для рѣшенія этой задачи, конечно, не нужно; 4) пользуясь прямой линіей, какъ наглядным и доступнымъ пособіемъ, ученики будутъ избавлены отъ необходимости „изучать“ такъ называемыя „типическія“ задачи.

Графическій методъ.

„Числа и линіи“ — читаемъ мы у одного изъ ученыхъ XVIII вѣка, — говорятъ воображенію дѣтей гораздо болѣе, чѣмъ это можетъ казаться непосвященному. Поэтому числа и линіи представляютъ собою наивѣрнѣйшее средство для упражненія дѣтей въ мышленіи, не рискующее ихъ сбить съ толку“. Къ этому можно добавить, что числа въ связи съ линіями иногда даютъ въ результатѣ очень ясныя представленія. Графическій методъ употреблялся не только у древнихъ греческихъ геометровъ, но и позже, въ вѣка, предшествовавшіе XVIII и XIX вѣкамъ,—вѣкамъ расцвѣта математическихъ наукъ преимущественно не-геометрическаго содержанія. Въ настоящее время графическій методъ употребляется всегда, когда мы занимаемся наглядным описаніемъ и даже изслѣдованіемъ какого-либо явленія, поддающагося этому методу. Ариѳметическіе вопросы и задачи алгебраическаго характера поддаются графическому методу, и это не можетъ подлежать никакому сомнѣнію. Конечно, естественнѣе всего рѣшать задачи алгебраическаго характера при благодѣтельной помощи алгебры. Но неестественнѣе всего—разрѣшать ихъ чисто-отвлеченными, скрыто-алгебраическими, и потому болѣе трудными, чѣмъ самая алгебра, пріемами, не опирающимися ни на что извѣстное малолѣтнимъ ученикамъ начальной школы. Алгебрѣ учить въ начальной школѣ, какъ извѣстно, совсѣмъ невозможно, а отвлеченно рѣшать замысловатыя задачи алгебраическаго характера трудно,—чтобы не сказать—тоже невозможно. Выходъ изъ этого положенія такой: либо совсѣмъ исключить задачи этого рода изъ курса, либо же использовать въ этомъ дѣлѣ прямую линію, но не ранѣе 4-го года обученія.

Условія приложенія прямой линіи къ рѣшенію задачъ алгебраическихъ.

Не учитель, а сами ученики должны чертить на классной доскѣ и въ своихъ тетрадяхъ или на доскахъ прямыя линіи. Не учитель, а сами ученики должны добиваться смысла этихъ линій, сводить ариѳметическіе вопросы къ вопросамъ о прямыхъ, поправлять, стирать, снова чертить и придумывать выходъ изъ разныхъ затрудненій. Учитель долженъ приходить къ нимъ только на помощь, при томъ лишь въ случаѣ необходимости. Излагать, какъ съ помощью прямой разрѣшить каждую задачу, учитель не долженъ. Изложеніемъ онъ прямо уничтожитъ образовательную силу и вспомогательное значеніе прямой линіи, какъ нагляднаго пособія. Въ крайнемъ случаѣ можно на одной или на двухъ задачахъ показать, какъ пользоваться этимъ орудіемъ, но работать ученики должны самостоятельно, хотя и подъ добрымъ руководствомъ своего учителя.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Нѣкоторыя частности обученія ариѳметикѣ.

Учитъ или преподаватъ?

§ 1. Встарину вся сила обученія сводилась къ учебнику, котораго текстъ, правила и даже примѣры ученики должны были заучивать наизусть. Тогда въ дѣлѣ обученія работа словесной памяти учениковъ казалась важнѣе всего, и на нее возлагались всѣ надежды. Впослѣдствіи обратились къ такъ-называемому преподаванію учебныхъ предметовъ, и къ этому времени относится то значеніе, которое стали придавать „объясненію“ и преподаванію. Эта форма обученія была перенесена изъ высшихъ учебныхъ заведеній въ среднія и даже низшія. При этомъ обученіе стало обращаться часто чуть ли не въ рядъ лекцій въ классѣ, и учителя стали обращать школу въ аудиторію, урокъ—въ лекцію, учениковъ—въ студентовъ, а учебный предметъ—въ науку. При этой точкѣ зрѣнія, кромѣ памяти учениковъ, стали, однако же, приниматься въ расчетъ, конечно, также ихъ вниманіе, разумѣніе и интересъ къ предмету, и это уже было большимъ шагомъ впередъ. Но самодѣятельность учениковъ, во время уроковъ, преподаваніемъ, однако, не всегда можетъ приниматься въ расчетъ. Не принимаетъ оно иногда въ расчетъ и методическихъ точекъ зрѣнія, а особенно — законовъ образованія въ умѣ учениковъ и пріобрѣтенія ими надлежащихъ представленій, понятій, умѣній и познаній того или другого содержанія. Поэтому, въ послѣднее время, преподаванію стали предпочитать обученіе, даже блестящему преподавателю — скромнаго учителя, чистому преподанію ученикамъ того или иного учебнаго матеріала—проработку этого послѣдняго учениками, работѣ почти бездѣятельнаго, пассивнаго вниманія каждаго отдѣльнаго ученика—самодѣятельную, притомъ классную, работу всѣхъ учениковъ класса. Пока учитель учитъ въ младшемъ и даже въ среднемъ отдѣленіи начальной школы, опасность, что онъ впадетъ въ тонъ преподавателя и увлечется изложеніемъ или объясненіемъ хотя и существуетъ, но не особенно велика. Еще не вполнѣ дисциплинированные ученики младшихъ двухъ отдѣленій начальной школы очень скоро покажутъ ему всю тщету его намѣреній. Въ старшемъ же отдѣленіи нецѣлесообразность преподаванія проявится

только впослѣдствіи, и тѣмъ больше опасность отъ невѣрнаго пониманія учителемъ тѣхъ средствъ, которыя находятся въ его распоряженіи, тѣмъ больше опасность отъ потерянаго учениками и учителемъ времени, потраченнаго послѣднимъ на связное изложеніе, объясненіе и преподаваніе. Ариѳметикѣ должно дѣтей учить въ истинномъ значеніи этого слова; ея не слѣдуетъ преподавать не только въ начальной школѣ, но даже въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Только учителю (а не преподавателю) можно разсчитывать на достиженіе школою истинныхъ (образовательной, практической и воспитательной) цѣлей, ради которыхъ ариѳметикѣ отведено мѣсто среди учебныхъ предметовъ, входящихъ въ составъ программы начальныхъ народныхъ училищъ. Сообразно съ высказаннымъ выше, изъ житейскаго обихода должны быть исключены такъ наз. „объясненія“ учителя: онъ долженъ не объяснять (т. е. не излагать), а путемъ вопросовъ и задачъ доводить учениковъ до того, къ чему стремится. Въ этомъ смыслѣ лучше заставлять учениковъ говорить и додумываться, а не самому говорить. Въ этомъ смыслѣ лучше, если они сами изобрѣтаютъ, а не берутъ изобрѣтенное другими, если они помнятъ не слова учителя, а ходъ собственной мысли, если они не изучаютъ правилъ, а пріобрѣтаютъ навыки, если у нихъ работаетъ не только словесная память, но и другія творческія способности ихъ познающаго духа.

Урокъ ариѳметики съ различныхъ точекъ зрѣнія.

§ 2. Всякій урокъ ариѳметики преслѣдуетъ нѣкоторую опредѣленную цѣль, отличается отъ другого урока или сходенъ съ нимъ по своему содержанію, согласуется съ требованіями той или иной методы обученія, пользуется тѣми или иными пріемами, средствами и пособіями обученія, отличается той или иной формою.—Цѣль урока можетъ быть достигнута или не достигнута. Если она достигнута не вполнѣ, то это не всегда вредно: иногда достаточно, если интересъ къ содержанію урока возбужденъ и если заложенъ фундаментъ для тѣхъ занятій, которые впослѣдствіи приведутъ классъ къ цѣли.—По содержанію своему, урокъ ариѳметики часто бываетъ не вполнѣ удовлетворителенъ потому, что учитель самъ дѣлалъ или дозволялъ ученикамъ дѣлать грубыя ошибки, которыхъ ни онъ, ни ученики не замѣтили. Начинающіе учителя и учительницы, вслѣдствіе волненія и неопытности, говорятъ вмѣсто однихъ словъ другіе: вмѣсто „купилъ“, говорятъ „продалъ“, вмѣсто „осталось“ — „было“ и т. п.; даже въ

числовыхъ данныхъ у начинающихъ учителей встрѣчаются ошибки, и нерѣдко бываетъ, что учитель самъ говоритъ „шесть да восемь—16“ и т. п. Ошибки этого рода встрѣчаются чаще всего у учителей, которые сами слишкомъ много говорятъ, не заставляютъ учениковъ говорить и не обращаются къ классу съ вопросомъ: „такъ или не такъ?“ Часто случается, что учитель соглашается съ ученикомъ, отвѣтившимъ невѣрно, или не соглашается съ нимъ, когда онъ отвѣтилъ вѣрно. Особенно часто эта ошибка по содержанію встрѣчается у учителей, которые пестрятъ свою рѣчь словами „да“ и „нѣтъ“, вовсе не умѣстныхъ на урокахъ. Для избѣжанія подобныхъ ошибокъ по содержанію, учитель долженъ побольше привлекать учениковъ къ работѣ и къ поправкамъ.—Пріемы и другія средства обученія зависятъ не только отъ учителя, но и отъ принятой имъ методы обученія. Держась извѣстной методы, учитель можетъ пріемы своего обученія разнообразить въ весьма значительной мѣрѣ. Ошибочны будутъ только тѣ пріемы, которые ведутъ къ цѣли слишкомъ окольнымъ, кружнымъ путемъ, а также тѣ пріемы, которые противорѣчатъ общедидактическимъ требованіямъ всякаго обученія. Къ числу таковыхъ принадлежатъ согласіе учителя съ отвѣтившимъ вѣрно на вопросъ ученикомъ или несогласіе его, выражаемое словами „да“, „нѣтъ“, „развѣ?“ и т. п. Сюда же принадлежатъ повтореніе учителемъ невѣрнаго отвѣта, требованіе такого повторенія ученикомъ, вопросъ: „а ты какъ сказалъ?“ и т. п. Слова „да“ и „нѣтъ“, сказанныя учителемъ, расхолаживаютъ классъ и погружаютъ его въ бездѣятельное состояніе, слово „развѣ?“ подсказываетъ ученику то, чего хочетъ учитель, а повтореніе невѣрныхъ отвѣтовъ внѣдряетъ въ умы учениковъ невѣрныя представленія. Это повтореніе представляетъ собою также ошибку противъ требованій формы обученія.—Противъ требованій формы обученія наиболѣе ошибокъ дѣлаютъ тѣ учителя, которые слишкомъ много сами говорятъ (они впадаютъ въ крайность излагательной формы), или слишкомъ много предлагаютъ мелкихъ вопросовъ, не давая ученикамъ связно говорить (эти учителя впадаютъ въ крайность вопросо-отвѣтной формы), а также тѣ, которые словами „да“, „нѣтъ“ и „развѣ?“ лишаютъ вопросо-отвѣтную форму ея изобрѣтающаго значенія.

Поведеніе учителя во время урока ариѳметики.

§ 3. Хотя вопросъ о поведеніи учителя относится къ числу вопросовъ не методическаго, а общепедагогическаго содержанія, но на урокахъ ариѳметики чаще встрѣчаются тѣ неприглядныя особенности поведенія учителя, которыя особенно вредно отзываются на дѣлѣ. Вслѣдствіе того, что всякій вѣрный ариѳметическій вопросъ допускаетъ только одинъ вѣрный отвѣтъ, у учителя на урокѣ ариѳметики можетъ проскользнуть особенно рѣзкое осужденіе невѣрнаго отвѣта, вродѣ „врешь!“ „вздоръ!“ и т. п. Хотя это относится до нравственной стороны урока, до педагогической этики, но вредъ отъ подобнаго отношенія къ ученикамъ, учащимся ариѳметикѣ, такъ великъ, что предостереженіе, можетъ быть, умѣстно и въ этомъ параграфѣ. Дѣло въ томъ, что, помимо неумѣстности оскорбительнаго для учениковъ поведенія учителя, рѣзкое отношеніе послѣдняго къ невѣрнымъ отвѣтамъ сильнѣе понижаетъ интересъ учениковъ къ занятіямъ ариѳметикою, чѣмъ интересъ къ занятіямъ другими предметами. Ни въ одномъ предметѣ ученикъ не рискуетъ, вслѣдствіе маленькихъ, прямо ничтожныхъ неудачъ, такъ скоро впасть въ уныніе, какъ при неудачныхъ занятіяхъ ариѳметикою.—Къ другой области поведенія учителя относится вопросъ о томъ, какъ онъ и ученикъ его пишутъ на классной доскѣ: молча ли или же говоря, что они дѣлаютъ? Необходимо самого себя пріучить и учениковъ неустанно пріучать къ немолчаливому письму на доскѣ. Особенно важно, чтобы самъ учитель говорилъ все, что онъ пишетъ на доскѣ, и предварялъ учениковъ о томъ, что онъ намѣренъ что-то написать и что они должны смотрѣть на доску, слушать, что онъ говоритъ, а если нужно, то и писать то же самое у себя въ тетрадяхъ. Въ этомъ надо быть настолько требовательнымъ къ себѣ, что если, напр., надо записать на доскѣ число 17 038, то учитель долженъ сказать, примѣрно, слѣдующее: „я напишу на доскѣ 17 038: семнадцать тысячъ, нуль, тридцать восемь“, и т. п. Учитель долженъ при этомъ стоять съ правой стороны доски и не заслонять того мѣста, на которомъ онъ пишетъ, писать съ протянутой влѣво правой рукой, такъ чтобы каждая цифра, которую онъ пишетъ, была видна съ самаго начала.—При необходимомъ довѣріи къ классу и его поведенію, учитель можетъ, если это возможно, садиться на мѣсто вызваннаго къ доскѣ ученика и писать у него въ тетради то, что тотъ пишетъ на доскѣ. Это дастъ вызванному ученику возможность продолжать работу далѣе и впослѣдствіи возобновить въ памяти то, что у него, въ противномъ случаѣ, не было бы записано въ тетради. Особенно это важно для учениковъ третьяго и четвертаго отдѣленій, при рѣ-

шеніи болѣе или менѣе сложныхъ задачъ и при выполненіи какихъ-либо продолжительныхъ вычисленій.—Къ поведенію учителя на урокѣ ариѳметики относится также обычай нѣкоторыхъ учителей слишкомъ долго держать вызваннаго къ доскѣ ученика у доски. Гораздо цѣлесообразнѣе во всѣхъ отношеніяхъ привлекать къ одному и тому же дѣлу возможно больше учениковъ: одинъ запишетъ, какое дѣйствіе надо сдѣлать, другой запишетъ знакъ равенства и выполнитъ какую-нибудь одну цѣльную часть дѣйствія, третій закончитъ его, четвертый запишетъ, что мы узнали, пятый запишетъ слѣдующее, и т. д. Это даетъ возможность поддержать вниманіе всего класса, не утомлять отдѣльныхъ учениковъ, вызваннымъ же къ доскѣ ученикамъ быстро восполнять пробѣлы въ тетради, и естественнымъ, а не искусственнымъ, образомъ привлекать весь классъ къ работѣ, и т. д.—Важно въ школѣ, гдѣ учитель занимается съ двумя или тремя отдѣленіями, не оставлять тѣхъ отдѣленій безъ вниманія, которыя заняты самостоятельными работами. Для этого надо пользоваться моментами, когда ученикъ, стоящій у доски и вычисляющій вслухъ, занятъ дѣломъ, которое ему можно безбоязненно, при участіи класса, препоручить. Въ такіе моменты можно подойти къ ученикамъ другого отдѣленія, поглядѣть, что тамъ дѣлается, и направить всю ихъ работу въ должную сторону, что иногда можетъ быть сдѣлано очень быстро, почти беззвучно.—Чтобы все отдѣленіе работало вмѣстѣ со стоящимъ у доски ученикомъ этого отдѣленія, учитель долженъ постоянно требовать отъ учениковъ этого отдѣленія полнаго согласія въ работѣ съ этимъ ученикомъ, не отставая отъ него и отнюдь не забѣгая впередъ. Только работающіе надъ самостоятельными упражненіями ученики могутъ и даже должны работать хотя и надъ однимъ и тѣмъ же матеріаломъ, но врознь, каждый отдѣльно отъ другихъ. Отдѣленіе же, работающее подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, должно, если можно такъ выразиться, все время дышать общимъ интересомъ къ дѣлу и, такъ сказать, не выбывать изъ строя и не опережать его. Въ противномъ случаѣ поведеніе учениковъ и учителя не будетъ отвѣчать требованіямъ класснаго обученія, и ученики одного и того же отдѣленія не будутъ въ состояніи итти въ занятіяхъ ариѳметикою нога-въ-ногу и рука-объ-руку.

Продолжительность занятій ариѳметикой въ каждомъ отдѣленіи.

§ 4. Практика начальной школы съ тремя и болѣе отдѣленіями показываетъ, что продолжительность урока ариѳметики въ каждомъ отдѣленіи не можетъ быть строго устанавливаема. Въ младшемъ отдѣленіи занятія

подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя вначалѣ и на нѣкоторыхъ другихъ ступеняхъ обученія должны и могутъ быть лишь весьма непродолжительными. Научивъ, напр., дѣтей писать цифру 7 и рисовать соотвѣтствующую этой цифрѣ числовую фигуру, учитель не можетъ итти далѣе и долженъ учениковъ предоставить самостоятельной работѣ. На нѣкоторыхъ ступеняхъ обученія это возможно и даже необходимо и въ среднемъ, и старшемъ отдѣленіи. Съ другой стороны, иная сложная чисто-ариѳметическая задача съ условіями или иное вычисленіе требуетъ отъ учениковъ третьяго или четвертаго отдѣленія продолжительной работы. Поэтому придерживаться строго часовой продолжительности урока можно только въ томъ смыслѣ, что если, напр., отъ 9-ти до 10-ти назначенъ урокъ ариѳметики, то ученики всѣхъ трехъ отдѣленій будутъ заниматься ариѳметикой въ теченіе этого часа или этихъ 50-ти минутъ. Но одно отдѣленіе, при этомъ, больше, а другое—меньше, занималось подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, одно отдѣленіе больше, а другое—меньше, работало надъ самостоятельными, втихомолку, упражненіями. Дабы при этомъ не терялось много времени понапрасну, учитель *до начала* урока долженъ, по возможности, приготовить все для предстоящихъ, въ тѣхъ или иныхъ отдѣленіяхъ, самостоятельныхъ работъ учениковъ: раскрыть книжки на надлежащей страницѣ, повѣсить „Таблицу для кл. упр. въ изустныхъ вычисленіяхъ“, приготовить пособія, грифеля и доски и т. п. Хорошо къ этому дѣлу привлечь и учениковъ. Въ такомъ случаѣ на предложеніе самостоятельныхъ работъ пойдетъ не много времени, а занятія будутъ продолжаться столько времени, сколько нужно. Если у даннаго отдѣленія, съ которымъ учитель предполагалъ заниматься непосредственно, дѣло пошло въ данный день особенно хорошо и успѣшно, вслѣдствіе чего у него остается свободное время, то можно ему предложить самостоятельную работу или изустное вычисленіе или даже работу по другому предмету, съ тѣмъ, чтобы позаняться потомъ съ другимъ отдѣленіемъ, или провѣрить работы этого послѣдняго, и т. п. Если какая-либо работа у одного изъ отдѣленій не удается, то надо довести ее до извѣстнаго пункта и докончить ее въ другой разъ. Не мѣшаетъ, въ виду особенной утомительности однообразныхъ ариѳметическихъ работъ, взять себѣ за правило каждый день въ теченіе нѣсколькихъ минутъ съ каждымъ отдѣленіемъ, особенно со старшими, упражняться въ изустномъ вычисленіи: сегодня—въ сложеніи двузначныхъ чиселъ, завтра въ умноженіи двузначнаго на однозначное, послѣзавтра—въ денежныхъ расчетахъ, и т. д. Можно также, въ случаѣ ежели замѣчается утомленіе учениковъ, позаняться, въ теченіе одной минуты, много двухъ, физическими упражненіями: вставаніемъ съ мѣстъ, подниманіемъ рукъ, и т. д. Можно перемѣнить родъ занятій: отъ письменныхъ работъ перейти къ изустнымъ упражненіямъ или обратно, и т. п.

Законченность урока.

§ 5. Часто, при сужденіи посторонняго лица объ урокѣ, даннымъ другимъ, и даже при сужденіи учителя о собственномъ урокѣ, приходится слышать неодобреніе или испытывать самому непріятное чувство неудовлетворен-

ности по причинѣ такъ называемой незаконченности урока, его неполной отдѣланности. Неодобреніе такого рода и неудовлетворенность самого учителя, однако же, часто не вполнѣ основательны въ томъ смыслѣ, что не всегда незаконченность урока является его недостаткомъ. Если урокъ не вполнѣ достигъ своей цѣли и если, при этомъ, самый матеріалъ урока или недостатокъ времени тому виною, то сѣтовать по поводу этой незаконченности не слѣдуетъ. Въ слѣдующій урокъ все придетъ къ вожделѣнному концу, и можетъ оказаться, что работа предшествовавшаго урока не только не потеряна, но даже, наоборотъ, крайне важна для полнаго успѣха. Что не было закончено вчера, можетъ сегодня особенно хорошо устроиться, а вчера прямо не могло устроиться какъ слѣдуетъ, и не могло не по винѣ учителя, а по причинамъ, отъ учителя не зависѣвшимъ. Обученіе—искусство, урокъ—произведеніе его, а ни одно произведеніе искусства не можетъ обойтись безъ поправокъ и безъ длительной работы *).

Возстановленіе содержанія предыдущаго урока.

§ 6. Весьма полезнымъ средствомъ для восполненія пробѣловъ предыдущаго урока, да и вообще прекраснымъ средствомъ обученія можетъ служить возстановленіе на словахъ, общими силами класса, хода предыдущаго урока, какъ бы свидѣтельскій опросъ класса относительно того, что дѣлалось въ прошлый разъ. При этомъ опросѣ окажется, что все, не ясное для учениковъ, обрисуется и для нихъ, и для учителя яснѣе, чѣмъ въ прошлый разъ, и что учитель не станетъ повторяться и повторять того, что и безъ повтореній ясно и повтореніе чего для учениковъ неинтересно и даже не поучительно. „Это мы знаемъ“,—думаютъ ученики, а наиболѣе дѣятельные даже говорятъ это учителю. Способъ возстановленія содержанія предыдущаго урока можетъ быть, примѣрно, слѣдующій: „Что я сдѣлалъ въ началѣ прошлаго урока,—кто помнитъ?“

*) Во избѣжаніе, однако, ненужныхъ никому огорченій, для такъ называемыхъ „пробныхъ“ уроковъ практикантовъ и практикантокъ изъ числа учащихся въ учительскихъ семинаріяхъ и институтахъ или въ педагогическихъ классахъ женскихъ учебныхъ заведеній, должно выбирать, особенно вначалѣ, темы, не требующія слишкомъ много времени. Темы могутъ отличаться и серьезностью, и даже трудностями, но не должны быть слишкомъ обширными. Темы даже самаго небольшого объема могутъ быть весьма поучительны какъ для дающаго пробный урокъ, такъ и для учениковъ его, какъ для присутствующихъ на урокѣ товарищей практиканта, такъ даже для руководителя занятіями. Слишкомъ же обширная тема приведетъ только къ упомянутой незаконченности, которая въ урокѣ практиканта нежелательна уже потому, что не ему, можетъ-быть, придется восполнять допущенные имъ недочеты.

(Ученики поднимаютъ руки).—„Говори, Коля!“ (Вы сначала поставили на столъ семь кубиковъ, и на книгу тоже семь кубиковъ).—„А потомъ?“ (А потомъ, говоритъ другой ученикъ, на тѣ кубики, что были на столѣ, вы поставили еще три кубика)—„Дальше, Митя!“ (Потомъ вы спросили, гдѣ больше). И т. д., и т. д. Скоро наступитъ моментъ, когда ученики уже невѣрно разсказываютъ то, что дѣлалось въ классѣ, и ни одинъ ученикъ не будетъ въ состояніи поправить невѣрныхъ показаній. Тогда учитель долженъ помочь ученикамъ, и можетъ оказаться, что послѣ этого ученики опять станутъ вѣрно разсказывать, какъ было дѣло. При такомъ возстановленіи фактовъ, и учитель и ученики уяснятъ себѣ, что имъ надо дѣлать далѣе. Это хорошо въ томъ отношеніи, что удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ истинно разумнаго обученія, въ томъ числѣ требованію самодѣятельности учениковъ, которая столь важна для ихъ ученическаго самосознанія и самочувствія.

Провѣрка самостоятельныхъ работъ учениковъ.

§ 7. Когда учитель занимается съ однимъ изъ отдѣленій своей начальной школы, остальныя отдѣленія ея занимаются выполненіемъ самостоятельныхъ работъ. Само собою разумѣется, что онѣ должны тѣсно примыкать къ пройденному ранѣе и служить для упражненій въ примѣненіи ранѣе усвоеннаго учениками. Въ ариѳметикѣ очень много такого учебнаго матеріала, который требуетъ не только уразумѣнія, но также многочисленныхъ и усердныхъ упражненій.—Среднее отдѣленіе школы особенно много работаетъ надъ самостоятельными упражненіями, такъ какъ вниманіе учителя особенно сильно направлено на учениковъ младшаго отдѣленія, которые наиболѣе нуждаются въ классной работѣ, подъ непосредственнымъ руководствомъ и вліяніемъ учителя, и на учениковъ старшаго отдѣленія, которымъ предстоятъ экзамены. Ослабить вредъ отъ легко объяснимаго и недостаточнаго вниманія учителя къ ученикамъ средняго отдѣленія, можно только при томъ условіи, если въ курсѣ средняго отдѣленія главное мѣсто отвести упражненіямъ въ письменномъ производствѣ четырехъ дѣйствій. Къ счастію, это вполнѣ возможно, такъ какъ письменное производство дѣйствій требуетъ только въ главныхъ своихъ пунктахъ живого слова учителя, а въ остальномъ требуютъ только методически расположенныхъ вычисленій. Особенно сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ и сколько-нибудь сложныхъ задачъ алгебраическаго характера, среднее отдѣленіе осилить не въ состояніи, и ихъ изъ курса ариѳметики, подлежащаго усвоенію среднимъ отдѣленіемъ, надо поэтому совершенно исключить.

Сообразно съ изложеннымъ выше, провѣрка самостоятельныхъ работъ учениковъ должна отличаться въ среднемъ и въ старшемъ отдѣленіяхъ инымъ характеромъ, чѣмъ въ младшемъ. Въ младшемъ отдѣленіи, гдѣ главное содержаніе курса сосредоточивается въ изустной ариѳметикѣ чиселъ первой сотни, провѣрка должна производиться въ классѣ, вслухъ. При этомъ тѣ, кто успѣлъ выполнить меньше вычисленій, чѣмъ остальные, должны быть привлечены къ чтенію работъ по книгѣ. Такимъ образомъ дѣти, отставшія

почему-либо, наверстаютъ упущенное. Произносящій вслухъ то, что надо было сдѣлать, и результаты дѣйствія—только читаетъ, а остальные свѣряютъ свои работы съ показаніями читающаго. Въ случаѣ же замѣченной ошибки или разногласія, замѣтившій таковыя, поднимаетъ руку и, по приглашенію учителя, говоритъ, въ чемъ дѣло, а сдѣлавшіе ошибку исправляютъ ее. Сказавшій что-либо невѣрно, долженъ повторить только вѣрный результатъ, который можно, въ случаѣ надобности, выписать на доскѣ. Невѣрныхъ же отвѣтовъ повторять не надо ни въ какомъ случаѣ. Исправлять работы учениковъ младшаго отдѣленія иначе (напр., на дому у себя, въ свободное отъ занятій время) совершенно безполезно, такъ какъ при этомъ способѣ исправленія работъ теряется выгода отъ повторныхъ упражненій учениковъ въ классѣ при провѣркѣ, и ученики ровно ничему не учатся при такой, безъ ихъ участія въ дѣлѣ, провѣркѣ письменныхъ работъ.—Въ среднемъ и старшемъ отдѣленіяхъ должно чаще всего провѣрять результаты вычисленій, способы расположенія вычисленія и записи. Результаты провѣряются вслухъ. Невѣрно располагающихъ вычисленія надо почаще вызывать къ доскѣ.

Почти безполезна домашняя, со стороны учителя, провѣрка работъ учениковъ также старшихъ отдѣленій. Но иногда,—не для провѣрки работъ учениковъ, а для уясненія себѣ самому уровня познаній и навыковъ этихъ отдѣленій,—учитель можетъ отобрать тетради или доски учениковъ средняго и старшаго отдѣленій. Онъ такимъ образомъ скорѣе и полнѣе узнаетъ число мало успѣвающихъ въ письменныхъ работахъ учениковъ, пробѣлы въ познаніяхъ нѣкоторыхъ учениковъ, умѣніе ихъ обращаться съ письменными принадлежностями, а главное—свои собственные промахи и недосмотры. Дабы такая самопровѣрка учителя и классу принесла пользу, надо, не называя фамилій учениковъ, допустившихъ ошибки и вообще нуждающихся въ самоусовершенствованіи, и даже не говоря о томъ, въ чемъ сдѣланы ошибки, ближайшій урокъ свой посвятить положительной (а не отрицательной) работѣ надъ неусвоеннымъ матеріаломъ или надъ тѣмъ, въ чемъ замѣчены недочеты. Возьмемъ два примѣра. Нѣкоторые изъ учениковъ, при умноженіи на 207, ненадлежащимъ образомъ подписали частныя произведенія. Въ этомъ случаѣ надобно сдѣлать такъ, чтобы всѣ ученики поработали тутъ же, въ классѣ, надъ выясненіемъ этого умноженія, а допустившіе ошибку, зачеркнули бы сами относящееся сюда мѣсто работы и зависящія отъ него остальныя ошибки (ежели таковыя есть) и занесли бы съ доски въ свои тетради надлежащую запись. Другой примѣръ: у нѣкоторыхъ учениковъ безпорядочно содержатся тетради, у другихъ много „кляксовъ“, посторонних вычисленій, у нѣкоторыхъ, можетъ-быть, найдутся рисунки или просто запачканы тетради. По этому поводу не надо съ учениками говорить о томъ, чего не слѣдуетъ дѣлать (этого не перечислить!), а надо выяснить, для чего существуютъ тетради на свѣтѣ, что надо писать въ тетрадяхъ по ариѳметикѣ, какъ ихъ надо содержать и т. д. Для внесенія большаго порядка въ веденіе записей въ тетрадяхъ, полезно, чтобы ученики каждый примѣръ отдѣляли отъ слѣдующаго прямой горизонтальной чертой во всю ширину осьмушки, а начинали бы работу слѣдующаго дня, подчеркнувъ послѣднюю работу прежняго дня двумя горизонтальными

прямыми во всю ширину осьмушки. Для той же цѣли полезно работу начинать съ записи (подъ чертами, отдѣляющими упражненія одного урока отъ упражненій другого) относительно того, какого числа какого мѣсяца и года эта работа выполнялась. Во избѣжаніе излишнихъ вопросовъ со стороны учениковъ, слѣдуетъ добиться того, чтобы дежурные ученики (старшаго или средняго отдѣленія) на классной доскѣ записали вкратцѣ, до начала уроковъ, число, мѣсяцъ и годъ, напр., такъ: 15 ноября 1903 г., по возможности выше, и чтобы эта запись не стиралась въ теченіе всего учебнаго дня. Такія мелочи не только вносятъ больше порядка въ ежедневную школьную жизнь, но оказываютъ много услугъ во многихъ другихъ отношеніяхъ.

Провѣрка познаній учениковъ.

§ 8. Принимая школу и вступая въ исполненіе своихъ учительскихъ обязанностей, учитель, какъ извѣстно, прежде всего долженъ провѣрить наличность познаній и навыковъ, имѣющихся въ распоряженіи учениковъ средняго и старшаго отдѣленій. Дѣлать это надо методически, переходя со ступени на ступень, начиная со ступеней низшихъ и отнюдь не перескакивая изъ одной области учебнаго предмета въ другую. Только при такой провѣркѣ учитель будетъ поставленъ въ возможность вполнѣ уяснить себѣ уровень ариѳметическихъ навыковъ и познаній того или другого отдѣленія. Сверхъ того, онъ будетъ поставленъ въ возможность восполнить тѣ или иные пробѣлы въ этихъ познаніяхъ и навыкахъ и не рискуетъ натолкнуться впослѣдствіи на неожиданности разнаго рода. Этотъ способъ провѣрки и восполненія познаній и навыковъ учащихся дѣтей потребуетъ меньшихъ затратъ силъ и времени, чѣмъ восполненіе случайно открываемыхъ пробѣловъ, отрывающихъ учителя отъ намѣченной имъ цѣли и доставляющихъ иногда и учителю, и ученикамъ ненужныя огорченія, отрывая ихъ отъ дѣла. Благодаря такой методической провѣркѣ познаній (напр., съ „Задачникомъ для учителей“ въ рукахъ), всѣ ученики даннаго отдѣленія въ очень скоромъ времени подводятся подъ одинъ уровень, что такъ важно для дальнѣйшаго успѣшнаго движенія ихъ впередъ. При этомъ не только достигается подведеніе познаній учениковъ къ одному уровню—но также восполняются всѣ пробѣлы въ ихъ познаніяхъ.

Мѣсто изустныхъ вычисленій въ курсѣ.

§ 9. Въ заключеніе этой главы, посвященной частнымъ вопросамъ, освѣщеніе которыхъ въ книгѣ этой не могло быть пріурочено къ той или иной ступени курса, важно отмѣтить, что изустнымъ вычисленіямъ (преимущественно надъ двузначными числами и надъ денежными данными) въ среднемъ и старшихъ отдѣленіяхъ начальной школы должно отводить, на каждомъ урокѣ ариѳметики не менѣе пяти минутъ. Курсъ младшаго отдѣленія и безъ того почти весь сосредоточивается на изустныхъ вычисленіяхъ. Въ среднемъ же и старшихъ отдѣленіяхъ преимущественно господствуютъ письменные способы производства дѣйствій. А такъ какъ изустнымъ вычисленіямъ

безъ многочисленныхъ и ежедневныхъ упражненій научить нельзя (это дѣло требуетъ навыка), то поэтому учитель начальной школы обязанъ посвящать нѣсколько минутъ каждаго урока ариѳметики этимъ вычисленіямъ. Полезно держаться того же правила относительно упражненій въ вычисленіяхъ на счетахъ, съ тою, однако же, разницей, что упражненія въ этихъ вычисленіяхъ могутъ практиковаться чрезъ день и стоять на второмъ планѣ. Только при соблюденіи этихъ условій школа можетъ выпускаемымъ ею въ жизнь воспитанникамъ своимъ дать тѣ ариѳметическіе навыки и познанія, которые имъ наиболѣе пригодны въ жизни, и сдѣлать для учащихся дѣтей ариѳметику предметомъ занимательнымъ и могущимъ оказать даже на общее развитіе учениковъ полезное воспитательное вліяніе. „Многолѣтній опытъ убѣждаетъ въ томъ, что только тѣ ученики умѣютъ хорошо вычислять письменно, которыхъ учили также вычисленію изустному“, говоритъ Келеръ, педагогъ, работавшій еще въ XVIII вѣкѣ. Къ сожалѣнію, эта истина, которая должна была бы быть общеизвѣстною и незыблемою основою обученія ариѳметикѣ, доселѣ забывается очень многими на практикѣ. Само собою разумѣется, что изустное вычисленіе не должно относиться до многозначныхъ чиселъ со многими значащими цифрами, а должно вращаться въ области вопросовъ, относящихся до чиселъ первой сотни, до круглыхъ многозначныхъ чиселъ, до наичаще встрѣчающихся дробей и единицъ мѣры, до ежедневныхъ денежныхъ расчетовъ.

Родная рѣчь на урокахъ ариѳметики.

§ 10. Каждый урокъ по какому угодно изъ учебныхъ предметовъ начальной школы долженъ быть въ то же время урокомъ родного языка. Поэтому и на урокахъ ариѳметики учитель долженъ не только самъ соблюдать требованія чистоты своей рѣчи, но и дѣтей побуждать къ тому же. Не избѣгая (въ случаѣ надобности) областныхъ словъ и выраженій для установки значенія какого-либо неизвѣстнаго дѣтямъ слова, учитель также долженъ постепенно и своевременно пріучать дѣтей къ рѣчи книжной и литературной, въ лучшемъ смыслѣ этого слова. Особенно трудно дается дѣтямъ употребленіе разныхъ причастныхъ формъ, отглагольныхъ именъ существительныхъ и книжныхъ оборотовъ рѣчи съ союзами, придаточными предложеніями и т. п., слова иностранныя (сумма, квадратъ, линія, результатъ вертикальный и т. п.), термины, образованные изъ словъ устарѣлыхъ, нынѣ не употребительныхъ (знаменатель, наименованіе, кратное число, слагаемое и т. п.). Часто

учителю приходится бороться съ областными формами и прямо неправильными словами и оборотами („по пять“, „по семь“, вм. по пяти, по семи, „чвёртка“ вм. четверть фунта „шаснадцать“ вм. шестнадцать, „счелъ“ вм. сосчиталъ, и т. п.). Но эта борьба съ областными формами не такъ трудна, какъ привитіе дѣтямъ литературныхъ и книжно-сухихъ формъ и оборотовъ рѣчи съ отглагольными именами существительными, съ причастіями и дѣепричастіями, съ относительными мѣстоименіями „который“, „чей“ въ косвенныхъ падежахъ и т. п. Только постепенно-методическое преодолѣніе этихъ трудностей на урокахъ по всѣмъ предметамъ обученія можетъ дать результаты и приблизить къ цѣли, и уроки ариѳметики не должны составлять исключенія изъ этого общаго правила.

Ариѳметическіе термины.

Особенныя трудности представляетъ собою полное усвоеніе учениками ариѳметическихъ терминовъ, не говорящихъ, по причинѣ устарѣлости ихъ и книжности своего возникновенія, ничего ни уму, ни языковому чутью учениковъ.—Слово „слагаемое“, напр., происходитъ отъ глагола „слагать“, употребительнаго преимущественно въ формѣ совершеннаго вида („сложить“). Кромѣ того, причастія въ страдательныхъ формахъ своихъ вообще необычны въ дѣтской и простонародной рѣчи. Здѣсь приходится не скрывать этихъ трудностей отъ учениковъ, а наоборотъ поставить дѣтей въ возможность смѣло и сознательно употреблять эти формы. Поэтому необходимы и соотвѣтствующія предварительныя упражненія: умѣемъ ли мы складывать, слагать?... то, что мы любимъ,—любимое, что бросаемъ—бросаемое, что читаемъ—читаемое, а что складываемъ, „слагаемъ“—слагаемое, и т. п.—Еще менѣе говорятъ уму и воображенію учениковъ термины дѣлитель и множитель, такъ какъ ученики смутно чувствуютъ, что мы при этомъ какъ бы одушевляемъ числа, но не понимаютъ, по какому праву мы это дѣлаемъ. Они понимаютъ, что учитель учитъ, сочинитель сочиняетъ, но что множитель множитъ, а дѣлитель дѣлитъ—для нихъ не осязательно, не ясно и даже странно. И въ этомъ случаѣ надо оказать должное воздѣйствіе прямо, если можно такъ выразиться, на языковое чутье учениковъ. Отъ нихъ не надо скрывать всего того, что является въ данномъ терминѣ живымъ и творчески-образнымъ началомъ. Наоборотъ: ихъ надо навести на уразумѣніе этого начала, опираясь не на внѣшнія, отвлеченныя (схоластическія и діалектическія) опредѣленія понятій, а на са-

мный смыслъ занимающихъ насъ словъ и словесныхъ формъ. Ученики должны не только понимать, что множитель какъ бы множитъ и, такимъ образомъ, какъ бы дѣйствуетъ, но впослѣдствіи даже уразумѣть, что иногда встрѣчается такой множитель, который не измѣняетъ множимаго (единица), что можетъ встрѣтиться и такой, который его уничтожаетъ (нуль), и т. п. Всему этому, конечно, не мѣсто ни на первыхъ ступеняхъ обученія, ни даже на одной какой-либо опредѣленной высшей ступени курса. Этому мѣсто на разныхъ ступеняхъ курса третьяго и четвертаго годовъ обученія. То же справедливо относительно способовъ и времени усвоенія учениками термина „дѣлитель“. Если, при этомъ, всѣ методическія предосторожности будутъ соблюдены, то смѣшеніе двухъ послѣднихъ терминовъ (множимое и множитель, или дѣлимое и дѣлитель), часто наблюдаемое въ школьной практикѣ, будетъ прямо невозможнымъ.—Что касается термина „частное“, то его усвоеніе не доставляетъ ученикамъ никакихъ огорченій, ежели связь этого слова со словомъ часть учениками подмѣчена и если она пріурочена къ самому смыслу дѣйствія дѣленія. Наиболѣе труднымъ и, можетъ быть, поэтому и наименѣе употребительнымъ на урокахъ ариѳметики является весьма важный терминъ „отношеніе одного числа къ другому“. Здѣсь справедлива опять-таки та же, выше намѣченная, необходимость полнаго вниманія учителя къ языковому чутью учениковъ. Ученики, на извѣстной ступени обученія, могутъ понять и понимаютъ выраженія: „я отношусь къ тебѣ хорошо“, „мои отношенія къ роднымъ“ и т. д., если на эти выраженія и ихъ смыслъ учитель обращаетъ должное вниманіе. Отсюда же перейти (не непремѣнно на томъ же урокѣ) къ смыслу и значенію термина „отношеніе 6-ти къ 3-мъ“ вовсе не такъ трудно, какъ это можетъ показаться учителю, никогда не пробовавшему учить дѣтей языку,—не грамматикѣ, а языку живому и творчески-созидательному. Не надо только родного языка бояться, не надо только думать, что безсмысленно заучить что-либо наизусть и безсмысленно вызубрить опредѣленіе термина на-память для дѣтей легче и интереснѣе, чѣмъ что-либо понять, чѣмъ почувствовать смыслъ и значеніе хотя бы даже и книжнаго слова. Надо помнить, что смыслъ этотъ коренится не въ отвлеченныхъ опредѣленіяхъ, а въ первоисточникѣ словъ даннаго языка, въ познающемъ духѣ народномъ и въ постоянно зиждительномъ и вполнѣ естественномъ, всегда дѣятельномъ творчествѣ человѣка на поприщѣ родного языка.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

вопросовъ, разрабатываемыхъ въ 1-ой части „Методики“, и собственныхъ именъ, упоминаемыхъ въ ней.— Числа относятся къ страницамъ этой книги.

Аксіомы: 227.
Анализъ задачъ: 47, 242, 247.
Аналитическій способъ рѣшенія задачъ: 242, 247.
Аполлоній Пергейскій: 3, 114.
Арженикова: 157.
Ариѳметика: 1, 2, 11, 41, 113, 158, 169, 181, 247, 257.
Ариѳметическая діалектика: 247, 248, 250.
Ариѳметическіе термины: 104.
Ариѳметическій ящикъ: 21.
Ариѳметическое соображеніе: 143, 261.
Архимедъ: 3, 114.
Баведовъ: 2, 6.
Бертранъ: 8.
Бирманъ: 4.
Буссе: 6.
Важность умноженія на 10, 100 и т. д.: 123.
Васильевъ: 114.
Введеніе въ ариѳметику: 164, 251.
Величина милліона: 113, 256.
Взять число слагаемымъ: 184.
Величины: 253.
Вильомъ: 5.
Вниманіе: 5, 43, 44, 51, 53, 115, 180, 281, 298.
Воздѣйствіе на органы чувствъ: 15, 18.
Вольфъ: 4.
Воображеніе: 2, 6, 15, 22, 29, 34, 52, 137, 193, 202, 231, 257, 258, 281, 283.
Вопросо-отвѣтная форма обученія: 50, 53, 300.
Вычисленія промежутковъ времени: 233.
Вычисленія: 3, 4, 5, 8, 15, 23, 32, 114, 158, 159, 250.
Вычисленія вспомогательныя: 152.
Вычислительные инструменты: 23—32, 174, 180.
Вычитаемое: 182.
Вычитаніе: 90, 116, 180—182.
Вычитаніе однозначнаго числа: 80, 261.
Вычитаніе составного именов. числа: 132.
Гауссъ: 3.
Гауффъ: 4.
Геометрическія познанія: 19, 226—231, 262.
Геометрія: 61, 226.
Гольденбергъ: XI.
Графическій методъ: 297.
Грубе: X.
Два дѣйствія надъ задуманнымъ числомъ: 276.
Дважды, трижды, и т. д.: 85.
Два рода задачъ: 35—38.
Десятокъ, сотня и т. д.: 76, 255.
Десятичная система: 2, 107, 113, 150, 188, 263, 271.
Десятичныя дроби: 64, 262, 263, 271.
Динтеръ: 7.
Дистервегъ: 7, 8, 16, 55, III.
Доказательства: 8, 227, 270.
Дополнительныя статьи: 235.
Дроби: 62, 202, 211 — 212, 258, 262, 265—270.
Дроби 1/2, 1/4 и 3/4: 86, XII.
Дробное число рабочихъ: 220.
Дробь какъ частное: 118, 215, 216, 219, 273.
Духъ обученія: 68.
Дѣленіе: 95—99, 116—120, 133—147, 195—202, 267, 269, 274.
Дѣленіе двузн. числа на однозначное: 116.

Дѣленіе именов. чиселъ на именованныя: 146.
Дѣленіе многозначнаго на однозначное число: 119.
Дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д.: 133, 134.
Дѣленіе на закруглимаго дѣлителя: 137.
Дѣленіе на три части: 237.
Дѣленіе на изв. число одинаковыхъ частей: 95.
Дѣленіе сост. имен. числа: 153.
Дѣленіе съ остаткомъ: 97, 98, 198, 190, 215.
Дѣлимое: 196, 310.
Дѣлитель: 196, 310.
Дѣлитель однозначное число единицъ высш. разр.: 135.
Дѣйствіе (ариѳметическое): 12, 41, 42, 153, 157, 165, 176—177, 240, 257—258.
Единица 2-го класса: 255.
Единица 3-го класса: 256.
Единица 4-го класса: 257.
Единицы 2-го, 3-го и 1-го разрядовъ: 255.
Единицы высшихъ классовъ: 257.
Единицы мѣры: 17, 19, 33, 63, 156, 160, 253, 275.
Единичное отношеніе: 25, 275.
Жакото: 14, III.
Живое слово учителя: 50, 52.
Задаваніе уроковъ по учебнику: 50.
Задаваніе на-домъ: 54.
Задача о гусяхъ: 277, 288—289.
Задача о пастухахъ: 48, 283, 295.
Задачи: 11, 12, 15—16, 17, 66 — 67, 238—250, 257, 276, IV.
Задачи: $\begin{pmatrix} ax+by=c \\ mx+ny=d \end{pmatrix}$: 285.
Задачи алгебраич. характера 38, 45—46, 47, 237, 276—297.
Задачи замысловатыя: 40—41, 257, V.
Задачи календарныя: 234.
Задачи на время: 232.
Задачи на пропорціон. дѣленіе: 236.
Задачи на умноженіе: 192.
Задачи неприведенныя: 39, 155, 209, 246, 248, 249, 269.
Задачи о бассейнахъ: 278, 290.
Задачи о курьерахъ: 280, 293.
Задачи приведенныя: см. задачи неприведенныя.
Задачи простыя: 15—16, 38, 41, 42, 43, 158.
Задачи сложныя (чисто-ариѳметич.): 39, 40, 44, 120, 238—250, 259.
Задачи смѣшанныя: 209—211, 234—235.
Задачи со многими неизвѣстными (алгебр. характ.): 41.
Задачи съ двумя и тремя неизвѣстными: 281—286.
Задачи съ одной неизвѣстной: 40—41, 276—281.
Задачи съ условіями: 72, 120—121, 159, 259.
Задачи чисто-ариѳметическія: 38, 39, 40, 41, 44, 45, 154, 238—250.
Задачники: 66, 246, 303.
Законченность урока: 303.
Закруглимое число: 137, 138.
Запись: 75, 79, 124, 126, 127, 128, 129, 131, 133, 141, 151, 152, 153, 157, 194, 218, 223, 225, 226, 239, 242—248, 250, 271, 272, 273, 285.
Запись вычитанія: 133.
Запись дѣленія: 134, 138.
Запись дѣленія на однозначное число: 117.
Запись при вычисленіи произведенія: 194—195.
Запись при дѣленіи многозначнаго числа на однозначное: 119—120.
Запись при дѣленіи сост. им. числа: 153.
Запись при превращеніи: 151.
Запись при раздробленіи: 131.
Запись при сложеніи сост. имен. чиселъ: 152.
Запись при умноженіи: 126—130, 190.
Запись при умноженіи на многозначное число: 126—130, 190.
Запись условій задачи: 239, 260.
Заучиваніе на-память: 57, 171, 298, IX.
Знаки дѣленія: 96, 200.
Знакъ сложенія: 20.
Знакъ умноженія: 85, 191.
Знаменатель: 220.
Значеніе алгебраич. задачъ: 46, 47, 276.
Значеніе ариѳметики: 1—3.
Значеніе простыхъ задачъ: 41.
Значеніе сложныхъ задачъ: 44.
Значеніе счетовъ: 25.
Излагательная форма обученія: 50, 53, 297, 298, 300.
Измѣненія неизвѣстныхъ величинъ: 283
Измѣненія произведенія: 204.
Измѣненія суммы и разности: 203.
Измѣненія частнаго: 208.
Измѣреніе величинъ: 253.
Изустное производство сложенія и вычитанія: 89—91, 104, 115, 261. 307.
Изустныя вычисленія: 4, 6, 15, 17, 78, 83, 89 — 91, 106, 158, 261, 303, 305, 307.
Изученіе чиселъ: III, X.
Изящество выполненія работъ: 67, 240.
Изящное вычисленіе: 169.
Иной способъ сложенія: 115.
Интересъ: 51, 114, 147, 152, 211, 249, 258, 298, 299.
Италіанская практика: 223.
Іеникe: 55.
Какъ надо считать: 71, 112, 252.
Какъ не должно учить ариѳметикѣ: 6, 16, 299.
Катехизація: 51.
Квадратъ: 229.
Келеръ: 6, 308.
Классификація задачъ: 38 — 41, 276.
Классныя работы: 54, 305.
Клаузбергъ: 2, 5.
Ковычки: 117.
Коменскій: 3, 15, 31, 32, 164, 245, 270.
Кондорсе: 2.
„Концентрическое" распредѣленіе курса: 13, 58, 61, 68.
Кратное сравненіе: 99—101, 117, 120, 134, 146, 147, 154, 195, 200, 260.
Кратное сравненіе съ десяткомъ и т. д.: 134.
Кратное сравненіе съ однозначнымъ числомъ ед. высшаго разряда: 134—135.
Кубики: 21, 91.
Курсъ ариѳметики: 11, 16, 163, 250, 258.
Курсъ двухгодичной школы: 160.
Курсъ второго и третьяго годовъ и училищъ: 61.
Курсъ 1-го года: 60, 62, 110, XII.
Курсъ 2-го года: 106, 111, XIII.
Курсъ 3-го года: 162, 257, 262, XIII.
Курсъ 4-го года: 163, 258, 262—275, 297, XIV.
Липласъ: 2, 113, 189.
Локкъ: 3.
Лотце: 167.
Лютеръ: 1.
Магницкій: 1.
Масс: 8, 14, 43.
Метода обученія: 5, 13.
Метода изученія дѣйствій: III.
Метода изученія чиселъ: III, X.
Метода цѣлесообразныхъ задачъ: 43, 50, 158, 258, III.
Методика ариѳметики: 12, 13.
Милліонъ: 112, 147, 256.
Многописаніе: 117, 120, 134, 136.
Множимое: 186.
Множитель: 186, 192, 264, 310.
Множитель 10, 100, 1000 и т. д.: 122, 133, 272, XI.
Множитель — нуль или единица: 189, 264.
Множитель однозначное число ед. высш. разряда: 124.
Модели единицъ мѣры: 33.
Мышленіе дѣтей: 2, 16, 249.
Мѣры длины: 34.
Мѣры квадратныя и линейныя: 230.
Мѣсто дробей: 63.
Мѣсто тройныхъ и другихъ правилъ: 63.
Мѣсто ученій объ именованныхъ числахъ: 62.
Мѣсто сложныхъ задачъ въ курсѣ: 15—16, 249.
Наглядное пособіе: 10, 16, 34, 48, 55, 71, 75, 79, 81, 82, 85, 86, 87, 89, 93, 94, 95, 96, 100, 104, 114, 135, 137, 161, 165, 172, 193, 215, 216, 227, 228, 286.
Наглядность пріемовъ обученія: 14, 19, 68, 71, 75, 85, 93, 193, 203.
Наименованіе чиселъ: 157, 250.
На столько-то и во столько-то разъ больше: 81, 91.
Науки: 11, 163.
Нахожденіе цѣлаго по части: 215.
Нахожденіе части цѣлаго: 212.
Невакруглимый дѣлитель: 140.
Неизвѣстное число—въ результатѣ дѣйствій: 278.
Неправильныя выраженія: 17.
Неприведенныя задачи: „Задачи неприведенныя".
Неумѣстность аналитическаго способа: 110, 247.
Неумѣстность на 1-й ступ. задачъ съ условіями: 72.
Нуль: 76, 78, 114, 122, 128, 129, 189, 199.
Нумерація: 12, 78, 80, 87, 101, 106, 107, 111, 165, 257.
Нумерація двузначныхъ чиселъ: 87.
Нѣсколько дѣйствій надъ задуманнымъ числомъ: 277.
Обозначеніе чиселъ буквами: 244, 248.
Обученіе ариѳметикѣ: 3—9, 298.
Обученіе счету до 20 ти: 70.
Объемъ: 230—232, 262.
Овербергъ: 4, 5.
Одновременное увеличеніе сомножителей: 205.

Опредѣленіе вычитанія: 181.
Опредѣленіе дѣленія: 195—197.
Опредѣленія суммы, сложенія и пр.: 171, 175, 177.
Опредѣленія: 4, 5, 15, 42, 57, 164, 166, 175, 177, 199, 227, 252, 258, 310.
Опусканіе упражненій; 67.
Основныя начала: 14, 15.
Особенности курса 1-го года: 106.
Особенности курса 2-го года 156.
Особенности курса 3-го года: 257.
Остатокъ: 181, 183, 201.
Отвѣты учениковъ: 50. 53, 164, 171, 299, 301.
Отношеніе алгебраич. задачъ къ ариѳметикѣ: 47, 276.
Отношеніе въ видѣ дроби: 237, 269.
Отысканіе произведенія: 95.
Пальцы рукъ: 11, 26.
Память: 4, 6, 56, 171, 174, 177, 188, 298.
Перемѣна порядка сомножителей: 86, 116, 121, 122, 130, 192.
Перемѣщеніе слагаемыхъ: 75.
Переходъ къ дѣленію: 96.
Періодич. десят. дроби: 274.
Перпендикуляръ: 229.
Песталоцци: 2, 6, 14, 32.
Письменное производство дѣйствія: 15, 79, 156.
Пиѳагорова таблица умноженія; 28, 29, 30, 230.
Пиѳагоръ: 30.
Планъ рѣшенія: 240, 244, 245, 248.
Площади и объемы: 230—231, 262.
Площадь: 230, 262.
Поведеніе учителя: 300.
Повтореніе дѣленія: 139.
Повтореніе курса: 260.
Повтореніе самостоятельныхъ упражненій: 92.
Повѣрка дѣленія: 202.
Повѣрка сложенія: 179.
Повѣрка умноженія: 191.
Подготовка учителя къ урокамъ: 66.
Полный курсъ ариѳметики: 12.
Понятія: 14, 43, 44, 46, 59, 163, 164, 165.
Понятія объ умноженіи и о части: 84.
Порядокъ работы въ классѣ: 54.
Порядокъ сомножителей (см. „перемѣна порядка сомножителей“).
Порядокъ упражненій въ счетѣ: 71.
Порядокъ упражненій въ сложеніи: 81, 89.
Порядокъ цифръ: 74.
Послѣднія цифры дѣлимаго и дѣлителя—нули: 145.
Пособія въ курсѣ 2-го года: 160.
Пособія геометрическія: 34, 231.
Пособія наглядно-измѣрительныя: 33.
Пособія наглядно-осязательныя: 21.
Пособія чисто-наглядныя: 19.
Правила: 5, 9, 15, 41, 42, 57, 125, 134, 145, 165, 203, 205, 207, 208, 261, 265, 269. 298.
Превращеніе именованныхъ чиселъ: 147—151, 154, 255.
Предметное число: 254.
Представленіе: 14, 15, 19, 21, 43, 46, 50, 59, 76, 87, 96, 104, 158, 159—160, 162, 216, 287.
Представленія геометрическія: 227, 262, 297.
Преподавать или учить: 298.
Прибавленіе единицы и вычитаніе: 75.
Прибавленіе чиселъ: 103, 115.
Приведенныя задачи: см. „Задачи приведенныя“.
Приложенія вычитанія: 183.
Примѣры: 4, 49, 159.
Присчитываніе: 173, 176.
Продолжительность урока: 302.
Произведеніе двухъ чиселъ: 184.
Произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ чиселъ: 185.
Происхожденіе вычитанія: 180.
Происхожденіе дроби: 215.
Происхожденіе дѣленія: 200.
Происхожденіе сложенія: 172.
Происхожденіе умноженія: 187.
Пропорціональное дѣленіе: 235.
Пропорціональность величинъ: 222.
Простое именованное число: 253.
Простое тройное правило: 99, 217.
Простота матеріала: 14, V.
Простыя задачи; см. „Задачи простыя“.
Процентъ: 213.
Прямая линія: 20, 228, 286—297.
Работа учениковъ: 50, 53, 303—307.
Раздробленіе именованныхъ чиселъ: 62, 65, 130, 153, 254.
Раздѣленіе курса на ступени: 6, 67, V, X.
Раздѣленіе наглядныхъ пособій: 19.
Раздѣленіе сутокъ: 233.
Различіе между наукой и учебнымъ предметомъ: 10, 11.
Размѣренная рѣчь: 94.
Разнообразіе: 93. 139.
Разнообразіе задачъ, требующихъ отысканія суммы: 167.

Разность: 162, 184.
Разность двухъ неизв. чиселъ и ихъ отношеніе: 283.
Разность неизвѣстныхъ чиселъ одна и та-же: 280.
Разрѣшеніе алгебр. задачи: 35, 47, 287.
Разумѣніе: 4, 56, 298.
Распредѣленіе курса: 58, 257, 262, XII.
Распредѣленіе курса дробей: 63, 262.
Рачинскій: 7.
Репетиціонная форма обученія: 50.
Родная рѣчь: 16, 44. 251, 308.
Рѣчь ученика: 46, 164, 308.
Рѣчь учителя: 16, 17, 52, 53, 308.
Самодѣятельность ученика: 14, 68, 297, 298, 305, V.
Самостоятельныя работы учениковъ: 54, 72, 92, 139, 305.
Сборники для учащихся: 55, VI.
Связь дѣленія съ умноженіемъ: 98.
Связь обоихъ видовъ дѣленія: 252.
Синтетическій способъ рѣшенія задачъ: 241, 247, 249.
Систематизація ариѳметическихъ познаній: 164, 307.
Слагамое: 309, см. „сложеніе“.
Слово «равно»: 98 (выноска).
Слово «раздробить»: 132.
Сложеніе: 84, 174, 175, 176, 177, 178.
Сложеніе и вычитаніе: 165.
Сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ: 89.
Сложеніе и умноженіе составныхъ имен. чиселъ: 152.
Сложеніе многочисленныхъ слагаемыхъ: 178.
Сложеніе нѣск. чиселъ: 84.
Сложное тройное правило: 223.
Сложныя задачи: см. Задачи сложныя.
Смѣшеніе 2-го рода: 237.
Содержаніе ариѳметики: 12.
Содержаніе урока: 299, 300, 304.
Сознательность работы ученика: 14, 15.
Сокращеніе дробей: 220, 266.
Сокращенное вычисленіе произведенія: 193—195.
Сокращенное отысканіе суммы: 168.
Солома: 22, 104, 161.
Сомножители: 187.
Составное именов. число: 254.
Списокъ отвѣтовъ: 67.
Спички: см. „солома“.
Способъ аналитическій: 110, 240, 242—244, 245, 246, 247—248.
Способъ синтетическій: 109, 240, 241, 245, 246, 247—249.
Способы рѣшенія задачъ: 107, 209, 241—244, 247, 260, 276—297.
Строчки рѣшенія: 45.
Ступени курса 1-го г.: 69.
Ступени курса 2-го года: 111.
Ступени курса 3-го года: 163.
Сумма: 175.
Сумма двухъ неизв. чиселъ и другая ихъ связь: 282, 287.
Сумма и разность: 281, 293.
Сумма не больше десяти: 79.
Счетъ: 69, 112, 165, 252.
Счеты: 23—26, 104, 114, 161, 258, 308.
Таблица вычитанія: 31, 81, 104, 113, 182, 183.
Таблица особенныхъ двузначныхъ и трехзначныхъ чиселъ: 143.
Таблица для классныхъ упражненій: 30, 88, 90, 91, 98, 103, 115, 158.
Таблица дѣленія: 201.
Таблица квадратныхъ мѣръ: 230.
Таблица мѣръ: 33, 132.
Таблица сложенія: 31, 88, 103, 113, 171, 174, 175, 177.
Таблица умноженія: 26—30, 31, 85, 93, 186, 188.
Термины: 104, 309.
Торговые счеты: 24, 88, 104, 114.
Требованія обученія ариѳметикѣ: 68, V.
Требованія формъ обученія: 53.
Три неизвѣстныхъ числа: 286, 296.
Трудности дѣленія: 195.
Трудности рѣшенія сложныхъ чисто-ариѳм. задачъ: 240.
Трудности рѣшенія задачъ алгебраическаго характера: 47.
Тѣло, кубъ и т. д.: 231, 262.
Тяготѣніе ученій къ общему центру: 65, 217, V.
Уголъ: 228.
Удареніе на словахъ: 91.
Уменьшаемое: 182.
Уменьшеніе числа и увеличеніе результата: 219.
Уменьшить въ нѣсколько разъ: 97.
Умноженіе: 184, 186, 187, 192.
Умноженіе на 10, на 100 и т. д.: 122, XI.
Умноженіе на дробь: 263, 267.
Умноженіе на единицу: 189, 264.
Умноженіе на однозначное число: 116.
Умноженіе на многозначное число: 125.
Умноженіе на нуль: 189, 264.
Умножить число на другое: 186.

Упражненія въ примѣненіи дѣленія: 143.
Упражненія въ счетѣ: 4, 71, 112.
Упражненія въ счисленіи: 88, 112.
Упражненія геометрическія: 228.
Уравненіе: 36.
Уроки ариѳметики: 299.
Условныя выраженія: 97.
Учебникъ ариѳметики: 5, 56, 57, 59, 196, 258, 262, VIII.
Учебныя пособія: 93.
Учебныя программы: 10, 12, XII.
Учебный предметъ: 10, 164.
Училища по положенію 1872 г.: 61.
Учить или преподавать: 298.
Форма обученія: 50, 53.
Форма опредѣленій: 166.
Характеръ курса 3-го года: 162, 257.
Цифры: 72—74, 255.
Цифры арабскія: 114, 160, 188.
Цифры римскія и церковно-славянскія: 105, 114, 128, 160, 189.
Цѣль обученія ариѳметикѣ: 2, 12, 16, 29, 247, 250, 296, 298.
Частное (или отношеніе): 195, 201, 269, 273, 310.
Чередованіе формъ обученія: 52.
Чертежъ: 34, 227, 280.
Черточки: 20.
Числа 2-го десятка: 77.
Числа двузначныя: 255.
Числа трехзначныя: 255.
Числа четырехзначныя и т. д.: 256.
Числитель: 220.
Число: 2, 252.
Число отвлеченное: 157, 200, 255.
Число цифръ частнаго: 144.
Числовыя фигуры: 19, 303.
Чтеніе въ классѣ текста учебника: 57.
Чтеніе задачи: 223, 259.
Что значитъ считать: 252.
Шведскіе счеты: 23, 25.
Шей: 1.
Штейеръ: 3.
Эвристическая форма обученія: 9, 50, 102, 247, 248.
Экзаменаціонная форма обученія: 50.

ВЫДЕРЖКИ ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ

о нѣкоторыхъ книгахъ С. И. Шохоръ-Троцкаго *).

„Названный учебникъ представляетъ стройное, вполнѣ научное изложеніе ариѳметики, приспособленное къ курсу среднихъ учебныхъ заведеній; авторъ воспользовался многими данными новѣйшей иностранной литературы... Закончимъ нашу рецензію заключеніемъ, что **„Учебникъ ариѳметики“** г. Шохоръ-Троцкаго достоинъ полнаго вниманія какъ преподавателей, такъ и любителей математики, и составляетъ вообще цѣнный вкладъ въ нашу учебно-математическую литературу. Цѣна книги весьма умѣренна (65 к. при объемѣ въ 200 слишкомъ страницъ, изъ которыхъ 40 стр. мелкаго шрифта)“. (Изъ отзыва г. Владиміра Шидловскаго въ № 11 „Русской Школы“ за 1892 г. **)

„Названная книга заслуживаетъ полнаго вниманія, какъ по важности вопросовъ, обсужденіе которыхъ составляетъ ея содержаніе, такъ и по воззрѣніямъ автора... Авторъ нерѣдко впадаетъ въ докторальный тонъ, прибѣгаетъ къ преувеличеніямъ, но всѣ недостатки книги искупаются ея достоинствами заставляющими желать, чтобы педагоги, и въ особенности учителя математики, обратили на нее должное вниманіе“. (Изъ обширнаго отзыва А. Д. Путяты о книгѣ **„Цѣль и средства преподаванія математики“** въ № 5 „Журнала Мин. Нар. Пр.“ за 1892 годъ).

„Настоящее сочиненіе (**Цѣль и средства преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ съ точки зрѣнія требованій общаго образованія**) представляетъ общій сводъ воззрѣній автора, много занимавшагося теоретической и практической разработкой вопросовъ, относящихся къ преподаванію математики... Сочиненіе г. Шохоръ-Троцкаго, о которомъ мы старались дать понятіе читателямъ „Образованія“, состоитъ всего изъ 115 стр., и въ то же время въ немъ затрагиваются всѣ болѣе или менѣе существенные вопросы средняго математическаго образованія... Сочиненіе это возбуждаетъ также большой интересъ своими систематическими указаніями на литературу, относящуюся къ преподаванію математики. Оно открываетъ возможность всякому, интересующемуся дѣломъ, позна-

*) Въ каждой изъ этихъ выдержекъ приведены только начало и конецъ отзыва, и иногда нѣсколько словъ изъ середины; многоточія означаютъ пропуски.

**) Подготовляется новое, совершенно переработанное, изданіе, примѣненное къ требованіямъ практики и согласованное съ современными научными требованіями.

комиться со всѣми его подробностями и частностями, имѣющими важность не для однихъ только преподавателей и воспитателей". (Изъ отзыва г-жи Е. Литвиновой въ „Образованіи" за 1892 годъ).

„Многочисленныя работы г. Шохоръ-Троцкаго, исполненныя съ большимъ знаніемъ дѣла, имѣютъ странно-двойственный характеръ: съ одной стороны, его собственныя воззрѣнія, до извѣстной степени оригинальныя, хотя нѣсколько тусклыя, и его обширное знакомство съ учебно-математическою литературою влекутъ его къ внесенію новыхъ пріемовъ въ практику преподаванія элементарной математики; съ другой стороны, его никогда не покидаетъ забота приноровить свои руководства къ существующимъ учебнымъ программамъ... Но во всякомъ случаѣ труды г. Шохоръ-Троцкаго заслуживаютъ серьезнаго вниманія и большого распространенія. Разсматриваемая книжка (**Методическій сборникъ ариѳметическихъ задачъ для среднихъ учебныхъ заведеній**) назначена для первыхъ трехъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Ея первое изданіе вышло въ 1889 году и было одобрено Ученымъ Комитетомъ М. Н. Пр. и Уч. Ком. при Св. Синодѣ. Какъ и другія книги г. Шохоръ-Троцкаго, и эта заслуживаетъ предпочтенія предъ большинствомъ ходкихъ книгъ" („Сѣверный Вѣстникъ" за 1895 годъ) *).

„Въ свое время мы познакомили читателей съ первымъ изданіемъ **Методическаго Сборника ариѳметическихъ задачъ для ср. уч. зав.** и выразили, между прочимъ, надежду, что г. Шохоръ-Троцкій не оставилъ дальнѣйшую разработку мыслей, высказанныхъ имъ въ его „Методикѣ ариѳметики" и внесетъ въ нашу педагогическую литературу совершенно оригинальный трудъ. (См. „Женское Образованіе" за 1889 годъ)... Обращаетъ на себя вниманіе также введеніе задачъ на мѣры метрической системы. Задачи эти составлены съ цѣлью указать простѣйшія соотношенія между метрическою и употребительною у насъ системами мѣръ. Сверхъ того мы находимъ упражненія въ вычисленіяхъ, расположенныхъ методически, чего, насколько мы знаемъ, нѣтъ ни въ какомъ другомъ задачникѣ. Г. Шохоръ-Троцкій въ этомъ случаѣ стремится къ тому, чтобы учащійся научился вычислять не только вѣрно, но быстро и изящно, пользуясь всѣми выгодами, представляющимися въ каждомъ частномъ случаѣ". (Изъ отзыва Е. Л. въ Октябрьской книжкѣ „Образованія" за 1895 г.) *).

„Эта маленькая книжка (**Чему и какъ учить на урокахъ первоначальной ариѳметики?**) заключаетъ въ себѣ безпощадную критику существующихъ пріемовъ преподаванія первоначальной ариѳметики и, вмѣстѣ съ тѣмъ, подробное изложеніе взглядовъ автора на этотъ предметъ... Всѣ огромные задачники съ задачами въ цѣлую страницу—плодъ печальнаго недоразумѣнія, благодаря которому ариѳметику многіе считаютъ чуть ли не труднѣйшею отраслью математическихъ знаній. Неумѣлое и безтолковое преподаваніе создаетъ въ школѣ цѣлый контингентъ такъ наз. неспособныхъ къ математикѣ, тогда какъ по существу дѣла всякій ребенокъ можетъ легко и свободно усвоить тѣ простыя понятія, съ которыми приходится знакомиться при изученіи первоначальной ариѳметики. Пора и давно пора поднять голосъ противъ рутинныхъ пріемовъ преподаванія

*) Книга эта нынѣ устарѣла.—Хотя она выдержала пять большихъ изданій, но болѣе выходить въ свѣтъ не будетъ. Она замѣнена двумя книгами для учителей и двумя—для учениковъ: „Ариѳметическій задачникъ для учителей приготовительныхъ классовъ и для первоначальнаго домашняго обученія" (Спб., 1903), „Ар. задачникъ для учениковъ пригот. классовъ и для первоначальнаго домашняго обученія", „Ар. задачникъ для учителей", вып II, и „Ариѳметическій задачникъ для учениковъ", вып. II).

не только въ начальной, но и въ средней школѣ. Методъ, предлагаемый г. Ш.-Т., по нашему мнѣнію, есть методъ всѣхъ здравомыслящихъ людей". („Русская Мысль". Августъ 1898 г.).

„Этотъ задачникъ („**Задачникъ для учителей**", вып. I) назначенъ для учителя и замѣняетъ конспекты отдѣльныхъ уроковъ. Такіе конспекты, набросанные опытною, умѣлою рукою, кладъ для начинающаго учителя, который, на первыхъ порахъ, часто не знаетъ, какъ подойти къ цѣли урока... Дополненіемъ къ этому задачнику, необходимымъ для самостоятельныхъ работъ учениковъ, служитъ „Задачникъ для учениковъ" (вып. I) того же автора, гдѣ на каждое новое условіе дается уже нѣсколько примѣровъ. Вообще, отъ книжекъ вѣетъ смѣлымъ русскимъ духомъ, въ нихъ отбрасывается нѣмецкая кропотливая работа, подъ игомъ которой школа была 30 слишкомъ лѣтъ". (Изъ отзыва г. Учителя Д. З. въ „Народномъ Образованіи", Ноябрь 1898 г.).

„Этотъ задачникъ („**Ариѳметическій задачникъ для учителей**", вып. II) изложенъ совершенно въ томъ же духѣ, какъ и первый, съ тою разницей, что здѣсь повторяются дѣйствія надъ цѣлыми числами и предлагается подробно ученіе о дробяхъ и т. д... Дополненіемъ, необходимымъ для самостоятельныхъ работъ учениковъ, служитъ „Задачникъ для учениковъ, вып. II". (Изъ отзыва г. Учителя Д. З., см. выше).

„Одна уже попытка облегчить тяжелый трудъ сельскаго учителя, обусловливаемый необходимостью вести въ школѣ совмѣстныя занятія съ двумя-тремя послѣдовательными группами учащихся, заслуживаетъ должнаго вниманія... Составленныя же г. Шохоръ-Троцкимъ два задачника (**Задачникъ для учителей**, вып. I, и **Задачникъ для учениковъ**, вып. I) представляютъ собою не только попытку въ указанномъ смыслѣ, но и въ дѣйствительности эти задачники настолько облегчаютъ трудъ сельскаго учителя, что всякій, занимающійся въ начальной, съ нѣсколькими группами, школѣ можетъ порадоваться появленію этихъ задачниковъ... Въ интересахъ возможно лучшей постановки преподаванія ариѳметики въ народной школѣ, въ интересахъ возможнаго облегченія учительскаго труда, и безъ того тяжелаго, и принимая во вниманіе легкость и доступность методы цѣлесообразныхъ задачъ, мы желали бы самаго широкаго распространенія въ школахъ задачниковъ г. Ш.-Т., такъ и вообще его методы цѣлесообразныхъ задачъ". (Изъ отзыва г. А. Дейниковскаго въ „Русской Школѣ" за 1899 г., № 7 и 8).

„Начальный учитель, въ большинствѣ случаевъ, живетъ въ одиночку, лишенъ живой бесѣды, вынужденъ рѣшать безповоротно всѣ вопросы, которые встрѣтятся въ его практикѣ; поэтому дѣльное, ясное руководство для него—лучшій помощникъ, лучшій совѣтникъ. Въ этомъ отношеніи означенное руководство (**Методика ариѳметики**, ч. I, изд. 5-е) вполнѣ заслуживаетъ вниманія со стороны учителя... Однимъ словомъ, означенное руководство можно безбоязненно рекомендовать народному учителю". (Изъ отзыва г. Учителя Д. З. въ „Народномъ Образованіи", Ноябрь 1898 г.).

„Авторъ названной книги (**Методика ариѳметики**, ч. I) уже давно заявилъ себя своею педагогическою опытностью и вѣрнымъ пониманіемъ общеобразовательнаго значенія каждаго отдѣла математики. Много авторъ выразилъ глубокаго пониманія и любви къ дѣлу преподаванія математики, много имъ затрачено труда на составленіе учебниковъ геометріи, ариѳметики, ариѳметическихъ задачниковъ и методики ариѳметики. Настоящее, 5-е, изданіе должно быть *настольною* книгой всякаго не только

начинающаго преподавателя ариѳметики въ начальныхъ школахъ, но и преподавателей математики среднихъ учебныхъ заведеній... Такъ велико, по нашему глубокому убѣжденію, значеніе „Методики ариѳметики", сост. С. И. Шохоръ-Троцкимъ; въ ней дѣйствительно есть чему поучиться, въ особенности начинающимъ преподавателямъ—такъ глубоко продумана каждая ступень обученія, такъ вѣрно понятъ духъ обученія... Чѣмъ больше вчитываешься въ эту книгу, тѣмъ болѣе оцѣниваешь ея большія достоинства, тѣмъ болѣе проникаешься справедливостью мыслей, положенныхъ въ основу книги и признательностью къ автору за его плодотворный трудъ". („Русская Школа", № 4 за 1898 г.).

„Разсматривая **руководства** г. Шохоръ-Троцкаго, интересующійся предметомъ педагогъ не можетъ не прійти къ заключенію, что авторъ основательно изучилъ нужды и потребности современной школы и добросовѣстно потрудился для удовлетворенія таковыхъ. Строки г. Шохоръ-Троцкаго такъ и дышатъ жизнью и практикой и обнаруживаютъ въ авторѣ недюжинный педагогическій талантъ... Настоятельно рекомендуемъ труды г. Шохоръ-Троцкаго вниманію преподавателей ариѳметики" („Лодзинскій листокъ", № 132 за 1899 годъ).

„Недавно вышедшая въ свѣтъ въ двухъ томахъ **Методика ариѳметики** С. И. Шохоръ-Троцкаго предназначена для учащихъ, причемъ каждый томъ имѣетъ самостоятельное значеніе. Первый предназначается для учителей одноклассныхъ начальныхъ школъ, второй—для учителей учебныхъ заведеній съ полнымъ курсомъ ариѳметики. Основная мысль обширнаго труда г. Шохоръ-Троцкаго прекрасно выражена слѣдующимъ эпиграфомъ изъ Ж. Масе поставленнымъ на первой страницѣ книги: „Истинная метода обученія ариѳметики состоитъ въ томъ, чтобы поставить умъ ребенка въ условія, приличествующія начальному періоду его развитія, и въ томъ, чтобы ребенокъ присутствовалъ при изобрѣтеніи ариѳметики и, такъ сказать, участвовалъ въ этомъ изобрѣтеніи"... Оба тома Методики могутъ быть пріобрѣтаемы отдѣльно" („Спб. Вѣдомости" № 92 за 1900 г.).

„**Методика** и **Задачники** г. Шохоръ-Троцкаго хорошо извѣстны учащимъ городскихъ и сельскихъ училищъ Саратовской губерніи, такъ какъ почтенный авторъ этихъ изданій въ 1897 г. былъ руководителемъ занятій на Саратовскихъ земскихъ педагогическихъ курсахъ и своей методикой ариѳметики живо заинтересовалъ курсистовъ... Г. Шохоръ-Троцкій придаетъ занятіямъ по ариѳметикѣ глубокое общеобразовательное значеніе и горячо протестуетъ противъ рутинныхъ пріемовъ преподаванія въ начальной и средней школахъ... Книга издана очень хорошо" („Саратовскій Листокъ", № 50 за 1900 годъ).

„Въ основу составленной С. И. Шохоръ-Троцкимъ **Методики ариѳметики** (ч. II) положена та мысль, что для развитія у учащихся правильныхъ ариѳметическихъ представленій, а впослѣдствіи и понятій, соотвѣтствующія части курса должны быть построены на задачахъ, и притомъ на задачахъ цѣлесообразныхъ... Въ этой книгѣ есть чему поучиться: такъ продумана въ ней каждая ступень обученія ариѳметики, такъ вѣрно понятъ духъ и методъ обученія. Книга эта—результатъ многолѣтней самостоятельной и, весьма плодотворной работы автора надъ матеріаломъ методическими частностями ариѳметики, какъ учебнаго предмета". (Изъ ива г. В. Шидловскаго въ №№ 10—11 „Русской Школы" за 1900 г.)

занятіяхъ ариѳметикою. Задача или рядъ ихъ служатъ не столько для примѣненія ариѳметическаго правила или ученія, уже выведеннаго и усвоеннаго учениками помимо задачъ, независимо отъ нихъ, какимъ-либо инымъ (не генетическимъ, не эвристическимъ) путемъ, сколько для созданія еще не выработанныхъ, не выведенныхъ и не усвоенныхъ дѣтьми правилъ, ученій, понятій.

Основныя точки зрѣнія этой книги.

Кромѣ этой основной идеи «методы цѣлесообразныхъ задачъ», на распредѣленіе курса въ этой книгѣ и въ остальныхъ книгахъ того же составителя повліяли также слѣдующія точки зрѣнія: а) Курсъ долженъ быть распредѣленъ на методически-рѣзко обособленныя ступени. б) Въ первые два (или три) года обученія въ начальной школѣ должны быть усвоены учениками существеннѣйшія части ариѳметики, а въ третій (или четвертый) годъ усвоенное должно быть дополнено, разработано въ подробностяхъ и закруглено. в) Ученія родственныя и, если можно такъ выразиться, логически тяготѣющія къ общему средоточію, и въ школѣ должны стоять рядомъ, а не такъ, какъ они расположены въ обычномъ курсѣ, гдѣ вслѣдствіе причинъ, давно уже утратившихъ свою силу, задачи, по существу и даже по составу своему однородныя, относятся часто къ различнымъ частямъ курса. Достаточно вспомнить, что т. наз. «раздробленіе» именованныхъ чиселъ составляетъ въ обычномъ курсѣ самостоятельную статью, слишкомъ далеко отодвинутую отъ ученія объ умноженіи и отъ рѣшенія задачъ на умноженіе и сложеніе, между тѣмъ какъ раздробленіе именованныхъ чиселъ представляетъ собою не иное что, какъ именно задачу этого рода. г) Замысловатыя задачи (въ особенности изъ числа задачъ алгебраическаго характера) въ курсѣ одноклассной начальной школы неумѣстны, такъ какъ въ самомъ курсѣ ариѳметики содержится столько образовательнаго матеріала, что искать такового въ трудныхъ задачахъ не представляется никакой надобности,—тѣмъ болѣе, что образовательное значеніе задачъ, въ особенности замысловатыхъ, слишкомъ односторонне въ сравненіи съ тѣми истинно-полезными умственными привычками, которыя ученикъ начальной школы можетъ пріобрѣсти, благодаря курсу ариѳметики какъ таковой. д) Требованія естественности пріемовъ обученія, простоты учебнаго матеріала, ясности цѣлей курса, его цѣлесообразности и постепенности, а также требованія самодѣятельности учениковъ должны быть строго соблюдаемы въ курсѣ всѣхъ предметовъ обученія, и въ курсѣ ариѳметики въ частности.

е) Любовь и доброе отношеніе къ ученикамъ, вниманіе и даже уваженіе къ ихъ истиннымъ умственнымъ интересамъ и возвышенное педагогическое міросозерцаніе—необходимыя условія всякаго обученія и, поэтому, также обученія дѣтей ариѳметикѣ.

Характеристика 5-го и 6-го изданій книги.

Начиная съ 5-го изданія, эта книга является *совершенно переработанною* и *новою*, конечно, не по основнымъ своимъ идеямъ, а по изложенію и по количеству предлагаемаго въ ней матеріала.—*Первыя изданія* содержали много теоретическаго матеріала и практику-учителю давали только основанія и общія идеи, не развивая ихъ въ частностяхъ.—*Пятое изданіе* уже весьма существенно отличается отъ предыдущихъ, притомъ въ слѣдующихъ отношеніяхъ: а) Въ виду того, что книга эта, какъ это выяснилось въ послѣдніе годы, встрѣтила довольно замѣтное сочувствіе въ качествѣ руководства для готовящихся къ учительской дѣятельности, въ ней сдѣланы весьма значительныя дополненія, съ цѣлью подробнаго разъясненія тѣхъ точекъ зрѣнія, которыя положены въ основу каждой изъ ступеней курса ариѳметики, разработанныхъ въ этой книгѣ. Не говоря уже о добавленіяхъ почти въ каждомъ отдѣльномъ параграфѣ, позволю себѣ указать добавленія болѣе значительныя, напр., относящіяся до способовъ использованія учебника ариѳметики (§ 23 гл. II и §§ 4—12 гл. VI), или относящіяся до рѣшенія задачъ на тройныя правила и задачъ алгебраическаго характера (§§ 15 и 16 и §§ 20 и 21 главы VI), изъ коихъ послѣднія мною распредѣлены на типы, намѣченные въ другихъ моихъ работахъ, еще много лѣтъ тому назадъ. б) По той же причинѣ пятое изданіе освобождено отъ приложеній, изъ коихъ одно („Сборникъ задачъ для учащихъ") занимало очень много мѣста въ книгѣ (вслѣдствіе многократнаго повторенія задачъ одного и того же рода, необходимыхъ только для учителя, пользующагося задачникомъ въ классѣ), а второе („Таблица для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ") полезно только для школы, притомъ въ количествѣ одного экземпляра на каждую школу, и совершенно не нужно лицамъ, которыхъ занимаетъ самая методика ариѳметики. в) Несмотря на отсутствіе приложеній въ книгѣ, объемъ ея значительно увеличился также вслѣдствіе того, что многія утвержденія относительно предлагаемаго ученикамъ матеріала, страдавшія въ первыхъ изданіяхъ книги нѣкоторою голословностью, въ 5-мъ изданіи, при малѣйшей въ томъ надобности, изъяснены и освѣщены болѣе или менѣе подробно. Въ то время, какъ прежнее, 4-ое, изданіе занимало безъ „Сборника для учащихъ" всего 72 страницы, пятое изданіе въ 3½ раза больше, занимая 243 страницы. г) Первыя четыре изданія „Методики ариѳметики" и многочисленныя въ нихъ ссылки были приноровлены къ двумъ задачникамъ подъ заглавіями: „Сборникъ упражненій по ариѳметикѣ для учащихъ" и „Сборникъ упражненій по ариѳметикѣ для учащихся, съ приложеніемъ краткаго учебника начальной ариѳметики и краткаго изложенія нѣкоторыхъ ученій геометріи", появившихся въ свѣтъ еще въ 1886 г. Съ тѣхъ поръ улучшенія вносились только въ „Сборникъ для учащихъ", и уже первые годы существованія этихъ книгъ показали, что матеріалъ, въ нихъ предложенный, значительно превышаетъ силы одноклассной трехгодичной начальной школы, которая располагаетъ всего только восемнадцатью или двадцатью мѣсяцами учебнаго времени. То обстоятельство, что поименованные выше „Сборники" значительно превосходятъ, по содержанію и объему своему, ту программу ариѳметики, которая можетъ быть выполнена въ одноклассной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ, сдѣлалось для меня яснымъ вскорѣ по появленіи въ свѣтъ моихъ книгъ. Поэтому я счелъ необходимымъ составить другія двѣ книжки, которыя больше соотвѣтствовали бы силамъ нашей одноклассной народной школы и первыя изданія которыхъ относятся къ лѣту 1896 года. Само собою разумѣется, что въ эти новыя книжки, а также въ пятое изданіе „Методики", внесены мною всѣ тѣ исправленія и улучшенія, на которыя меня натолкнула и практическая работа, въ теченіе многихъ лѣтъ, надъ вопросами обученія ариѳметикѣ въ нѣкоторыхъ начальныхъ школахъ, гдѣ мнѣ представилась возможность поучить дѣтей и поучиться самому съ ихъ помощью, далѣе—работа надъ преподаваніемъ методики ариѳметики въ нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ и, наконецъ, посильная работа моя на нѣкоторыхъ (временныхъ) педагогическихъ курсахъ. Въ 1896 году обнародованы мною первые выпуски книгъ подъ заглавіями „Ариѳметическій задачникъ для учителей" и „Ариѳметическій задачникъ для учениковъ", которые предназначены для одноклассныхъ начальныхъ школъ, а въ концѣ 1897 года — вторые выпуски тѣхъ же книгъ, предназначенные для другихъ учебныхъ заведеній, въ которыхъ проходится болѣе полный курсъ ариѳметики. Пятое изданіе „Методики" уже было примѣнено не къ устарѣлымъ „Сборникамъ задачъ" прежнихъ изданій, а къ первымъ выпускамъ только-что поименованныхъ мною книжекъ, и всѣ ссылки въ ней относятся къ этимъ послѣднимъ книгамъ, не только содержащимъ въ себѣ весьма многочисленныя исправленія, но и распространеннымъ несравненно сильнѣе, чѣмъ ранѣе обнародованные „Сборники". — *Шестое изданіе*, пересмотрѣнное и снова дополненное, отличалось отъ пятаго въ слѣдующихъ отношеніяхъ: а) Въ него внесены многочисленныя исправленія, коснувшіяся преимущественно изложенія. б) Дополнены: § 10 гл. II-ой, имѣющій предметомъ своимъ полную классификацію задачъ, § 3 гл. IV-ой, касающійся порядка ознакомленія дѣтей съ цифрами, § 5 гл. V-ой, относящійся до расположенія письменныхъ вычисленій при умноженіи многозначныхъ чиселъ, § 12 гл. V-ой—замѣчаніемъ о записи наименованій при производствѣ дѣйствій и при рѣшеніи задачъ, § 22 гл. VI-ой замѣчаніемъ относительно употребленія буквъ при составленіи плана рѣшенія чисто-ариѳметическихъ задачъ, для временнаго обозначенія промежуточныхъ и окончательныхъ результатовъ дѣйствій, приводящихъ къ отвѣту на вопросъ задачи. в) Добавлены, въ главѣ VI-й новые параграфы: о значеніи „приведенныхъ" задачъ (§ 23, ср. § 10 гл. II), о сравнительномъ значеніи аналитическаго и синтетическаго способовъ рѣшенія задачъ (§ 24), объ истинномъ значеніи сложныхъ задачъ (§ 25), о записи условій сложныхъ задачъ (§ 28), о восполненіи пробѣловъ въ умѣніи учениковъ вычислять (§ 29), о томъ—преподавать ли ариѳметику или учить ей (§ 30). г) Въ шестомъ изданіи, предложены, вмѣсто введенія (въ самомъ началѣ книги), тридцать мыслей объ ариѳ-

метикѣ и объ обученіи этому предмету, которыя высказаны въ разное время извѣстными педагогами и учеными. Онѣ лежатъ въ основѣ современной методики ариѳметики, собраны мною въ разное время и отпечатаны въ № 12 журнала „Народное Образованіе“ за 1899 годъ. Кромѣ того, 6-ое изданіе первой части (какъ и вторая часть книги, посвященная вопросамъ прохожденія полнаго курса ариѳметики, Спб. и Москва, 1900) снабжено „Алфавитнымъ указателемъ“ вопросовъ, разрабатываемыхъ въ этомъ изданіи.—Эти дополненія снова увеличили объемъ книги почти на 2½ печатныхъ листа, и 6-е изданіе такимъ образомъ стало больше четвертаго почти въ четыре раза.

Особенности седьмого изданія.

Настоящее (седьмое) изданіе отличается отъ шестого изданія той же книги въ слѣдующихъ отношеніяхъ: а) оно напечатано двумя шрифтами: болѣе мелкимъ шрифтомъ напечатано то, что важно преимущественно для учителя-практика и для дополнительныхъ занятій лицъ, подготовляющихся къ учительской дѣятельности; болѣе крупный шрифтъ содержитъ въ себѣ изложеніе основныхъ методическихъ взглядовъ и предназначенъ преимущественно для этихъ послѣднихъ лицъ; б) всѣ ссылки на задачники, составленные мною для начальныхъ школъ, выдѣлены изъ текста и заключены въ скобки, чтобы облегчить чтеніе крупнаго шрифта тѣмъ лицамъ, которыя интересуются только общими указаніями, или учатъ не по моимъ книгамъ; в) помимо множества поправокъ въ изложеніи, въ настоящемъ изданіи болѣе опредѣленно и болѣе согласно съ современными взглядами выяснено истинное значеніе учебниковъ ариѳметики для 3-го и 4-го годовъ обученія въ начальной школѣ *);

*) Для характеристики этихъ взглядовъ на истинное значеніе и роль учебника ариѳметики для 3-го или 4-го года обученія въ начальной школѣ, позволю себѣ привести слѣдующія выдержки изъ предисловія къ моей „Ариѳметикѣ для начальныхъ школъ“, Спб. 1903. „По содержанію своему каждый параграфъ и каждая часть его, по книгѣ прорабатываемые учителемъ съ учениками, должны быть ученикамъ хорошо извѣстны. Необходимо, чтобы ученикамъ приходилось, при изученіи книги, работать не только надъ содержаніемъ ея, но преимущественно надъ тѣмъ, какъ то или иное ученіе ариѳметики выражено въ книгѣ, и отчасти надъ тѣмъ, почему оно такъ или иначе выражено“. Далѣе: „Подготовка къ усвоенію учениками того или иного ученія, той или иной мысли, того или иного правила должна состоять изъ ряда предварительныхъ цѣлесообразныхъ задачъ, вопросовъ и упражненій, имѣющихъ въ виду не только содержаніе предстоящей по книгѣ работы, но и словесное выраженіе, въ которое облечено это содержаніе. Иногда при этомъ, можетъ оказаться, что работу учениковъ надъ словеснымъ выраженіемъ того или иного ученія надо, приноровлять, такъ сказать, подгонять къ избранному въ книгѣ способу изложенія, къ избранной въ ней

г) задачамъ алгебраическаго характера отведена цѣлая глава, содержащая параграфъ съ многочисленными чертежами, въ которомъ изложены способы рѣшенія наиболѣе замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера съ помощью прямой линіи, какъ весьма цѣлесообразнаго во всѣхъ отношеніяхъ нагляднаго пособія *); наконецъ, д) добавлены двѣ главы, изъ которыхъ одна посвящена 4-му году обученія, а другая—программѣ курса, условіямъ ея выполненія и нѣкоторымъ частнымъ вопросамъ обученія, относящимся до веденія уроковъ ариѳметики въ начальной школѣ.—Въ виду того, что книга, несмотря на мелкій шрифтъ многихъ параграфовъ, значительно увеличилась противъ 4-го, 5-го и даже противъ 6-го изданія, цѣна ея увеличена (на 20 к.).

Отличіе этой книги отъ другихъ книгъ того же рода.

Настоящій томъ представляетъ собою (будучи, при этомъ, однако же, книгою, не зависящею отъ второго тома той же книги) первую часть давно уже задуманной мною и исподоволь подготовленной къ печати работы по методикѣ полнаго курса ариѳметики. Эта, первая, часть моей «Методики» разрабатываетъ, съ методическихъ точекъ зрѣнія, курсъ, подлежащій усвоенію въ начальныхъ школахъ съ трехгодичнымъ и четырехгодичнымъ курсомъ. [Для учителей приготовительныхъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, для родителей и воспитателей, которыхъ интересуетъ домашнее обученіе первоначальной ариѳметикѣ (приблизительно въ объемѣ ариѳметики первой сотни), мною обнародована, въ концѣ 1902 г., отдѣльная книга подъ заглавіемъ «Методика ариѳметики для учителей приготовительныхъ классовъ, для родителей и воспитателей». Наконецъ, для учителей учебныхъ заведеній съ полнымъ

формулировкѣ“. Наконецъ: „Словамъ вообще надо придавать меньше значенія, чѣмъ существу дѣла и идеямъ. А потому выучивать что-бы то ни было изъ этой книги наизусть ученики не должны ни въ какомъ случаѣ. Они должны себѣ хорошо усвоить мысли и идеи, а не слова. Если данная мысль ариѳметическаго содержанія учениками усвоена, то, послѣ надлежащей проработки относящагося къ ней текста даннаго параграфа, подходящія слова для надлежащаго выраженія этой мысли также найдутся въ распоряженіи учениковъ. Текстъ книги долженъ только упорядочивать ариѳметическое мышленіе учениковъ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, развивать и упорядочивать также и навыкъ учениковъ въ надлежащемъ выраженіи тѣхъ или иныхъ ариѳметическихъ мыслей или правилъ“.

*) Параграфъ этотъ представляетъ извлеченіе изъ статьи моей, помѣщенной въ № 1 „Народнаго Образованія“ за 1902 годъ, подъ заглавіемъ: „Прямая линія какъ наглядное пособіе при обученіи ариѳметикѣ“.

курсомъ ариѳметики издана вторая часть «Методики ариѳметики» (Спб. 1900).]—Особенности первой части «Методики» и приноровленныхъ къ ней книгъ, подъ заглавіями: «Ариѳметическій задачникъ для учителей» (вып. I) и «Ариѳметическій задачникъ для учениковъ» (вып. I) сводятся (помимо методы, въ нихъ принятой) къ слѣдующему: а) въ первомъ десяткѣ дѣти знакомятся только со сложеніемъ и вычитаніемъ; б) съ умноженіемъ они знакомятся, имѣя дѣло уже съ числами двухъ первыхъ десятковъ, а съ дѣленіемъ—по усвоеніи ими первыхъ двухъ дѣйствій и дѣйствія умноженія въ предѣлѣ первой сотни; в) именованнымъ числамъ здѣсь не отводится отдѣльнаго мѣста въ курсѣ; г) равнымъ образомъ и дробямъ посвящены упражненія на разныхъ ступеняхъ курса: напр., первоначальное представленіе о простѣйшихъ дробяхъ (половинахъ и четвертяхъ) дается на 9-ой ступени, ранѣе дѣленія чиселъ, къ дробямъ ученики возвращаются во время усвоенія дѣленія въ предѣлѣ первой сотни, и т. д.; д) задачъ многосложныхъ, трудныхъ и замысловатыхъ въ курсѣ начальной школы не предполагается, но для удобствъ учителя, несогласнаго съ этимъ взглядомъ, въ «Методикѣ» (глава VIII), разсмотрѣны способы рѣшенія алгебраическихъ замысловатыхъ задачъ; ж) задачи и упражненія, предлагаемыя учителемъ для проработки подъ непосредственнымъ его руководствомъ, помѣщены въ «Задачникѣ для учителей» (вып. I), а задачи для самостоятельныхъ работъ учениковъ помѣщены въ совершенно отдѣльной книгѣ, подъ заглавіемъ «Ариѳметическій задачникъ для учениковъ» (вып. I); е) къ курсу перваго года отнесена вся ариѳметика первой сотни и, если возможно, первыя два дѣйствія надъ многозначными числами, но за-то изъ него совершенно исключены не только замысловатыя задачи алгебраическаго характера, но даже задачи сложныя ариѳметическія *); наконецъ, ж) курсъ раздѣленъ на ступени, притомъ многочисленныя и согласованныя со встрѣчающимися трудностями учебнаго матеріала.

О раздѣленіи курса на ступени.

Въ руководствахъ по методикѣ ариѳметики, построенныхъ на «изученіи чиселъ», число ступеней курса весьма велико. У самого Грубе, родоначальника этой методы, ариѳметика первой сотни распадается на сто ступеней, для

*) Многочисленные друзья мои изъ числа учительницъ и учителей народныхъ школъ неоднократно подтверждали и продолжаютъ подтверждать, что этотъ курсъ одолимъ въ первый годъ, и что онъ прямо необходимъ, именно въ первый годъ, для дальнѣйшихъ успѣховъ учениковъ.

каждаго числа этой сотни по ступени. У Гольденберга и его подражателей и послѣдователей число ступеней для ариѳметики цѣлыхъ чиселъ равно тремъ: 1) дѣйствія въ предѣлѣ чиселъ перваго десятка, 2) дѣйствія въ предѣлѣ первой сотни и 3) дѣйствія надъ многозначными числами.—Въ моихъ книгахъ курсъ ариѳметики, подлежащій усвоенію въ начальной школѣ, распадается на 30 ступеней. Матеріалъ перваго года обученія я дроблю на большое число ступеней въ виду большого скопленія трудностей какъ-разъ въ ариѳметикѣ чиселъ первой сотни, въ которой ученики не только усваиваютъ себѣ всѣ четыре дѣйствія надъ числами первой сотни, но пріобрѣтаютъ главный ариѳметическій матеріалъ, служащій основаніемъ для всего дальнѣйшаго курса. Иныя ученія (напр., о раздробленіи именованныхъ чиселъ) умѣщены на одну ступень, другія (напр., о дѣленіи многозначныхъ чиселъ) распредѣлены на четыре. Все зависитъ отъ того, принадлежитъ ли данное ариѳметическое ученіе къ числу простыхъ, проникнутыхъ одною руководящей идеею, или же къ числу такихъ, въ составъ которыхъ входитъ нѣсколько руководящихъ идей.—Запоминать, что къ какой ступени курса относится, не надо ни ученикамъ, ни даже учителю. Такое запоминаніе столь же не нужно, какъ не нужно запоминаніе того, въ какомъ параграфѣ и въ какой главѣ даннаго учебника что-нибудь изложено. Если мною, вм. слова «параграфъ», употребляется слово «ступень», то лишь потому, что это послѣднее слово лучше напоминаетъ о необходимой *постепенности* курса (слова «ступень» и «степень»—одного корня). Слово «ступень» можетъ послужить къ тому, что и въ сознаніе учителя,—особенно начинающаго, который въ томъ наиболѣе нуждается,—внѣдрится важное убѣжденіе въ томъ, что постепенность необходима.—Число же ступеней зависитъ не отъ меня, а отъ порядка образованія ариѳметическихъ идей въ умѣ учениковъ, къ коему сводится обученіе ариѳметикѣ. Число это можно и увеличить, ежели стоять за еще большее дробленіе матеріала. Напр., 19-ая ступень содержитъ въ себѣ умноженіе на 10, 100 и т. д., а также на 20, 30..., 200, 300 и т. д., но ее можно разбить на двѣ, изъ которыхъ одна разрабатываетъ умноженіе на одну единицу высшаго разряда, а другая—умноженіе на другое однозначное число такихъ единицъ. Но, съ другой стороны, для помѣщенія всего ученія объ умноженіи на одну ступень тоже нѣтъ никакого основанія. Если бы мы даже совершили такое соединеніе всего этого матеріала во-едино, то и тогда

умноженіе чиселъ на 10, 100 и т. д. и на 20, 30, 40..., 200, 300, 400 и т. д. ученики должны были бы усвоить себѣ раньше, чѣмъ умноженіе на многозначныя числа съ нѣсколькими значащими цифрами. Эти примѣры служатъ только для освѣщенія того, что ступени курса существуютъ и что не въ числѣ ихъ все дѣло, а въ ихъ послѣдовательности. Называть ли ихъ при этомъ ступенями или параграфами—для дѣла, конечно, тоже безразлично.—Но обученіе—процессъ жизненный, не всегда укладывающійся въ тѣсныя рамки только логическаго распредѣленія матеріала. А потому нѣкоторыя «ступени» курса могутъ быть, если можно такъ выразиться, пестрыми. Таковою въ моихъ книжкахъ является, напр., девятая степень, посвященная сложенію нѣсколькихъ однозначныхъ чиселъ, дающему въ суммѣ не болѣе двадцати, умноженію въ томъ же предѣлѣ и наглядному представленію о дробяхъ: 1/2, 1/4 и 3/4. Эта пестрота оказывается, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ, не только дозволительною, но иногда даже весьма полезною и необходимою. (Ср. § 9 главы V этой книги).

Программа курса ариѳметики. Программа того курса, которому посвящена эта книга и другія, съ нею связанныя одною руководящей идеею, представляется въ слѣдующемъ, согласномъ съ дѣйствительностью и уже выработанномъ жизнью, видѣ:

Курсъ перваго года. I. Счетъ отъ одного до десяти; цифры отъ 1 до 9 включительно; изустное сложеніе чиселъ, сумма которыхъ не болѣе десяти; изустное вычитаніе въ случаяхъ, когда уменьшаемое не больше десяти. (На первыхъ порахъ совсѣмъ не должно вводить ни умноженія, ни дѣленія).—II. Счетъ отъ одного до двадцати; нумерація всѣхъ чиселъ первыхъ двухъ десятковъ; изустное вычитаніе въ тѣхъ случаяхъ, когда уменьшаемое не превышаетъ двадцати; записи первыхъ двухъ дѣйствій и ихъ результатовъ (въ указанныхъ случаяхъ сложенія и вычитанія), съ помощью знаковъ сложенія, вычитанія и равенства. (Пока ученики не вышли за предѣлы первыхъ двадцати чиселъ, не надо касаться умноженія, и особенно—дѣленія, какъ отдѣльныхъ дѣйствій).—III. Счетъ отъ двадцати до ста, единицами и десятками; изустное сложеніе чиселъ, сумма которыхъ не болѣе ста; изустное вычитаніе однозначныхъ и двузначныхъ чиселъ изъ двузначныхъ же; перемноженіе двухъ чиселъ перваго десятка и запись этого дѣйствія и его результатовъ съ помощью знаковъ умноженія и равенства. (Пока ученики не усвоили смысла и таблицы умноженія, упражненія въ дѣленіи не вполнѣ умѣстны).—

IV. Обоего рода дѣленіе (на извѣстное число одинаковыхъ частей и на извѣстныя одинаковыя части) при дѣлимыхъ, не превышающихъ ста и дающихъ, при дѣлителяхъ, не большихъ десяти, частныя, не большія десяти.—V. Нумерація трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ; письменное (когда оно необходимо) производство сложенія и вычитанія чиселъ въ тѣхъ случаяхъ, когда сумма и уменьшаемое меньше десяти или ста тысячъ.

Курсъ второго года. I. Повторительныя упражненія въ изустныхъ вычисленіяхъ надъ числами первой сотни въ связи съ житейскими расчетами, относящимися преимущественно до стоимости (что стоятъ 8 арш. ситцу по 12 к. за аршинъ, 7½ ф. сахару по 16 к. за фунтъ, 12 фунтовъ муки по 6½ коп., и т. п.).—II. Нумерація многозначныхъ чиселъ и письменное (когда оно необходимо) производство сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ.—III. Письменное (когда оно необходимо) производство умноженія многозначныхъ чиселъ на однозначныя и многозначныя и, въ связи съ этимъ дѣйствіемъ, раздробленіе составныхъ именованныхъ чиселъ.—IV. Письменное (когда оно необходимо) производство дѣленія (обоего рода) двузначныхъ и многозначныхъ чиселъ на однозначныя.—V. Письменное производство дѣленія многозначныхъ чиселъ на двузначныя и многозначныя; превращеніе именованныхъ чиселъ; дѣйствія надъ составными именованными числами.—VI. Сложеніе и вычитаніе (изустное или письменное, смотря по надобности) дробей и смѣшанныхъ чиселъ и нахожденіе частей цѣлаго и цѣлаго по данной части его.

Курсъ третьяго года. I. Повторительныя упражненія разнаго рода, преимущественно изъ областей, почему-либо недостаточно усвоенныхъ учениками, и, во всякомъ случаѣ, изъ областей особенно важныхъ въ практическомъ отношеніи.—II. Выработка болѣе точныхъ понятій о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами въ связи съ необходимѣйшими ариѳметическими опредѣленіями и правилами.—III. Измѣненія и преобразованія дробей, сложеніе и вычитаніе дробей, нахожденіе части цѣлаго и цѣлаго по данной его части и рѣшеніе, въ связи съ этими навыками, задачъ на такъ называемыя «правила»: тройное, процентовъ и пропорціональнаго раздѣленія—простѣйшаго содержанія.—IV. Вычисленіе площадей квадратовъ и прямоугольниковъ и вычисленіе объема кубовъ и прямоугольныхъ параллелепипедовъ въ связи съ основными геометрическими понятіями.—V. Рѣшеніе задачъ на такъ называемое «вычисленіе времени» (задачъ «календарнаго содержанія»).

Курсъ четвертаго года. Въ начальныхъ школахъ съ четырехгодичнымъ курсомъ (такъ наз. «двухкомплектныхъ») курсъ третьяго года можетъ быть освобожденъ отъ матеріала, изложеннаго въ программѣ этого курса, въ пунктахъ II-мъ, III-мъ и IV-мъ, и усиленъ въ отношеніи пріобрѣтенія учениками большаго навыка въ производствѣ житейскихъ расчетовъ, въ письменномъ производствѣ дѣйствій надъ многозначными числами, и въ производствѣ вычисленій на счетахъ. Матеріалъ же, намѣченный въ курсѣ третьяго года, въ пунктахъ II-мъ, III-мъ и IV-мъ, можетъ быть цѣликомъ или частью отнесенъ къ курсу четвертаго года. Къ этому послѣднему курсу можно также отнести: а) усвоеніе учениками, съ помощью учебника, но подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, болѣе или менѣе стройнаго курса ариѳметики цѣлыхъ чиселъ въ систематической его формѣ; б) дополненіе познаній учениковъ о дробяхъ и о дѣйствіяхъ надъ ними, опять-таки въ болѣе или менѣе систематическомъ сопоставленіи этихъ познаній; в) четыре дѣйствія надъ десятичными дробями (безъ періодическихъ) въ ихъ примѣненіяхъ къ житейскимъ вопросамъ и къ метрической системѣ; г) рѣшеніе болѣе сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ и болѣе или менѣе замысловатыхъ алгебраическаго характера; д) болѣе полное усвоеніе основныхъ геометрическихъ представленій (объ углахъ, о кругѣ, о треугольникѣ, о параллелограммѣ, о площади этихъ фигуръ, о прямоугольномъ параллелепипедѣ, а въ случаѣ возможности также о прямой призмѣ, о пирамидѣ, о прямомъ цилиндрѣ, прямомъ конусѣ, о шарѣ и объ объемахъ этихъ тѣлъ).

Программа эта съ успѣхомъ выполнима только при томъ условіи, ежели не только первый, но второй и даже третій годы обученія совершенно освобождены отъ рѣшенія слишкомъ сложныхъ и сколько-нибудь замысловатыхъ задачъ.—Что касается курса 4-го года обученія, то программа его освѣщена въ главѣ VII-ой настоящей книги, а классной его проработкѣ могутъ помочь «Ариѳметика для начальныхъ школъ» (СПБ. 1903) и составленное мною (имѣющее вскорѣ выйти въ свѣтъ) собраніе задачъ и примѣровъ, подъ заглавіемъ «Четвертый годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ», въ двухъ книгахъ: а) для учителей и б) для учениковъ.

Въ заключеніе выражаю искреннюю признательность учрежденіямъ и лицамъ, давшимъ мнѣ возможность, по мѣрѣ силъ моихъ и разумѣнія, поработать на временныхъ педагогическихъ курсахъ, устроенныхъ въ свое время для учителей церковно-приходскихъ школъ въ Нижнемъ-Новгородѣ, Пензѣ, Москвѣ и Петербургѣ, и для учителей земскихъ школъ — въ г. Демянскѣ (Новгородской губ.), Саратовѣ, Городнѣ (Черниговской губ.), Курскѣ, Екатеринославѣ, Рязани и Новозыбковѣ (Черниговской губ.). Благодаря встрѣчѣ, на курсахъ этихъ, со многими сотнями труженицъ и тружениковъ народной школы, стоящихъ у самаго дѣла, мнѣ удалось поближе узнать ихъ истинные интересы и благія желанія, и этому книги мои обязаны, конечно, очень многимъ.—Приношу также свою искреннюю признательность всѣмъ тѣмъ учителямъ и учительницамъ народныхъ школъ и учрежденіямъ, которые поддерживаютъ меня своимъ сочувствіемъ въ посильныхъ стремленіяхъ моихъ быть полезнымъ русской народной школѣ, а также оффиціальнымъ и неоффиціальнымъ рецензентамъ за ихъ вниманіе къ моимъ посильнымъ работамъ. — Немало обязанъ я также учрежденіямъ и лицамъ, давшимъ мнѣ возможность поработать въ нѣкоторыхъ начальныхъ школахъ, среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, въ учебныхъ заведеніяхъ, посвященныхъ подготовкѣ учителей и учительницъ, и спеціально-педагогическихъ классахъ нѣкоторыхъ женскихъ учебныхъ заведеній. Всей этой работѣ моей на педагогическомъ поприщѣ книги мои, конечно, обязаны чрезвычайно многимъ. — Пріемлю смѣлость питать надежду на то, что и онѣ, можетъ-быть, въ свою очередь принесутъ нѣкоторую пользу русской школѣ, сослужившей имъ такую большую службу.

С. Шохоръ-Троцкій.

Спб., Бассейная, 15.
Декабрь 1902 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

		стр.
Предисловіе къ седьмому изданію	. . . . .	I
Вмѣсто введенія тридцать мыслей объ ариѳметикѣ и объ обученіи этому предмету.	. . . . .	1
Гл. I. Что такое методика ариѳметики?	. . . . .	10
Гл. II. Средства обученія ариѳметикѣ.	. . . . .	18
Гл. III. Распредѣленіе курса ариѳметики по годамъ начальной школы и духъ обученія.	. . . . .	58
Гл. IV. Первый годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ	. . . . .	69
Гл. V. Второй годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ	. . . . .	111
Гл. VI. Третій годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ	. . . . .	161
Гл. VII. Четвертый годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ.	. . . . .	262
Гл. VIII. Задачи алгебраическаго характера	. . . . .	276
Гл. IX. Нѣкоторыя частности обученія	. . . . .	298
Алфавитный указатель вопросовъ, разрабатываемыхъ въ этой книгѣ, и фамилій, упоминаемыхъ въ ней.	. . . .	313